

CAPÍTULO 8

BOBINAS, INDUTÂNCIAS E INDUTORES

No estudo de tensão alternada, além da resistência devida aos resistores, aparecem indutâncias e indutores. A indutância está presente em todos os circuitos reais.

Para se falar em indutância, deve-se, inicialmente, recapitular os princípios do magnetismo e do eletromagnetismo, além da lei de Faraday.

Neste capítulo, estudaremos a indutância.

8.1 MAGNETISMO

Magnetismo é a propriedade associada aos materiais que atraem o ferro e ligas de ferro. Este nome é derivado de uma região da Ásia Menor chamada Magnésia, que é um dos lugares onde certas pedras (a magnetita – composto de ferro magnetita (Fe_3O_4)) foram encontradas. Um corpo que possui as propriedades do magnetismo é denominado de ímã. Os ímãs podem ser naturais ou artificiais. Um ímã natural é um corpo que é magnético no estado no qual é encontrado, como essas pedras citadas acima. Já um ímã artificial é um corpo que possui o magnetismo por indução. Corpos de ligas de aço temperado retêm grande parte de seu magnetismo após ter sido removida a força magnetizante inicial. Estes corpos são denominados de *ímãs permanentes*. Corpos de aços doces e ferro mantêm apenas uma pequena parte do magnetismo adquirido por indução e podem ser denominados de *ímãs temporários*. As ligas de aços doces são facilmente magnetizadas e desmagnetizadas, o que faz com que elas sejam usadas como núcleos para *eletroímãs*. Um núcleo de eletroímã se transforma em um ímã forte apenas quando uma corrente elétrica circula pelo condutor enrolado neste núcleo. Certas substâncias, como o cromo, tungstênio e cobalto, quando são adicionadas em pequenas quantidades ao aço, aumentam suas propriedades magnéticas. Da mesma forma, tratamentos térmicos podem alterar as propriedades magnéticas dos materiais.

Como sabemos, nas proximidades de um ímã existe o campo magnético, como mostrado na Fig. 8.1. De forma simplificada, esse campo magnético é caracterizado por um fluxo magnético Φ , que sai externamente pelo pólo norte do ímã e entra pelo seu pólo sul. Dentro do ímã, o fluxo caminha do pólo sul para o pólo norte. Esse fluxo é constante no tempo e tem como unidade o weber [Wb].

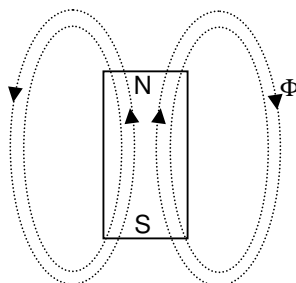


Fig. 8.1 – Campo magnético nas proximidades de um ímã

Como em corpos com cargas elétricas, ímãs com pólos magnéticos iguais se repelem e ímãs com pólos diferentes se atraem. Charles Coulomb descobriu que se duas fontes pontuais de pólos magnéticos, possuindo intensidades M_1 e M_2 , fossem separadas por uma distância r , a força entre fontes é dada por

$$F = k \frac{M_1 M_2}{r^2} = \frac{1}{4\pi\mu} \frac{M_1 M_2}{r^2}$$

onde k é uma constante e depende do meio de separação dos pólos. Ela depende da constante μ ,

que é definida de permeabilidade absoluta do meio. Esta equação é da mesma forma que a equação de Coulomb para as cargas. Fazendo-se um paralelismo entre o magnetismo e a eletricidade, pode-se definir:

intensidade de campo magnético H , como a força por unidade de pólo:

$$H = \frac{F}{M}$$

onde a unidade de H é newtons/webers [N/Wb]. Esta intensidade de campo magnético corresponde a intensidade de campo elétrico.

densidade de fluxo magnético B , como o fluxo magnético Φ passando perpendicularmente por uma área A :

$$B = \frac{\Phi}{A}$$

onde a unidade de B é webers/metros quadrados [Wb/m²] ou teslas [T]. Esta densidade de fluxo magnético corresponde a densidade de corrente elétrica.

Força magnetomotriz $\mathcal{I}$, como o produto da intensidade de campo magnético pelo comprimento de um caminho de fluxo magnético:

$$\mathcal{I} = Hl$$

onde a unidade de $\mathcal{I}$ é newtons.metros/webers [Nm/Wb]. Esta força magnetomotriz corresponde a tensão elétrica.

Relutância magnética $\mathcal{R}$ é a relação entre a força magnetomotriz e o fluxo magnético:

$$\mathcal{R} = \frac{\mathcal{I}}{\Phi}$$

onde a unidade de $\mathcal{R}$ é newtons.metros/webers² [Nm/Wb²]. Esta relutância magnética corresponde a resistência elétrica.

8.2 ELETROMAGNETISMO

Quando se circula uma corrente por um condutor elétrico, nas proximidades desse condutor aparecem um campo e um fluxo eletromagnético. Se a corrente for constante no tempo, o fluxo magnético também será constante no tempo, como mostrado na Fig. 8.2a. (indicação com letras maiúsculas). Em caso contrário, sendo a corrente variável no tempo, o fluxo eletromagnético será variável no tempo, como mostrado na Fig. 8.2b (indicação com letras minúsculas).

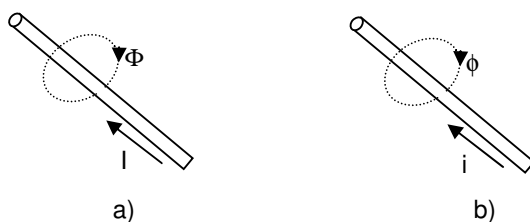


Fig. 8.2 – Campo eletromagnético nas proximidades de um condutor elétrico

Se dermos uma volta de 360° no condutor, constituindo uma espira, como mostrado na Fig. 8.3a, o fluxo ϕ no centro da espira será maior do que seria na situação do condutor elétrico da Fig.

8.2b. Se tivermos 2 espiras, como na Fig. 8.3b, o fluxo será 2ϕ . Se tivermos N espiras, então o fluxo será $N\phi$. O conjunto de N espiras é definido como uma *bobina*.

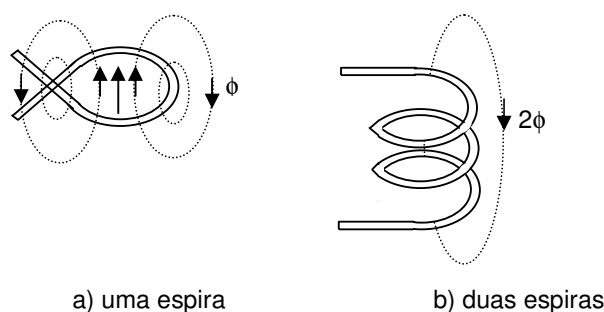


Fig. 8.3 – Fluxo eletromagnético em conjuntos de espiras.

Se agora colocarmos a bobina sobre um núcleo ferromagnético, como mostrado na Fig. 8.4, então o fluxo magnético será ainda maior.

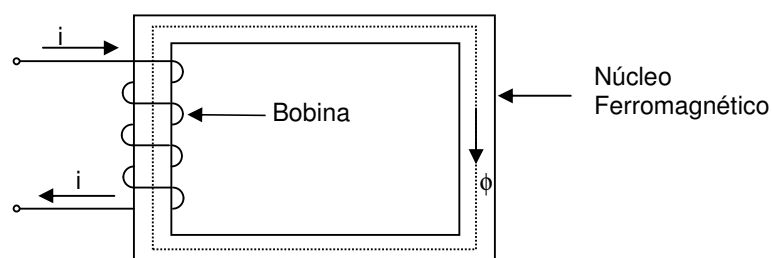


Fig. 8.4 – Bobina colocada em um núcleo ferromagnético

Então, o meio onde se põe a bobina tem influência sobre a quantidade de fluxo magnético. Essa influência é denominada de *permeabilidade magnética* e tem como símbolo o μ e como unidade o henry por metro [H/m]. A permeabilidade do vácuo, que é designada por μ_0 , vale $4\pi 10^{-7}$ H/m. A permeabilidade de outros meios sempre se refere à permeabilidade do vácuo por um fator denominado de *permeabilidade relativa*, cujo símbolo é μ_r . A permeabilidade do meio é dada por $\mu = \mu_r \mu_0$. A tabela I apresenta a permeabilidade relativa de alguns materiais.

Tab. I - Permeabilidade relativa de alguns materiais

Substância	Grupo	μ_r
Bismuto	Diamagnético	0,99983
Prata	Diamagnético	0,99998
Cobre	Diamagnético	0,999991
Água	Diamagnético	0,999991
Vácuo	Não-magnético	1
Ar	Paramagnético	1,0000004
Alumínio	Paramagnético	1,00002
Paládio	Paramagnético	1,0008
Pó de permalloy 2-81	Ferromagnético	$1,3 \times 10^2$
Cobalto	Ferromagnético	$2,5 \times 10^2$
Níquel	Ferromagnético	$6,0 \times 10^2$
Ferroxcube 3	Ferromagnético	$1,5 \times 10^3$
Aço doce	Ferromagnético	$2,0 \times 10^3$
Ferro (0,2% de impurezas)	Ferromagnético	$5,0 \times 10^3$
Permalloy 78 (liga de Ni e Fe)	Ferromagnético	$1,0 \times 10^5$
Supermalloy	Ferromagnético	$1,0 \times 10^6$

8.3 INDUTÂNCIA E INDUTOR

Quando se circula uma corrente i na maioria das bobinas, o fluxo eletromagnético $N\phi$ é proporcional a corrente. A equação que relaciona a corrente i com o fluxo eletromagnético $N\phi$ é

$$Li = N\phi, \quad (8.1)$$

onde L é denominada de *indutância* da bobina. A unidade de indutância é o henry [H]. O componente elétrico usado com o objetivo de se utilizar essa propriedade é denominado de *indutor*. O símbolo de um indutor é



8.4 LEI DE FARADAY

Se colocarmos uma bobina de N espiras dentro de um campo eletromagnético variável no tempo, como mostrado na Fig. 8.5, aparecerá uma tensão elétrica nos terminais da bobina, dada por

$$v = -\frac{d}{dt}(N\phi) = -N \frac{d\phi}{dt}. \quad (8.2)$$

Essa relação é conhecida como *lei de Faraday*.

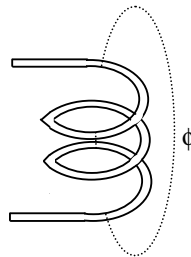


Fig. 8.5 – Bobina dentro de um campo eletromagnético variável no tempo

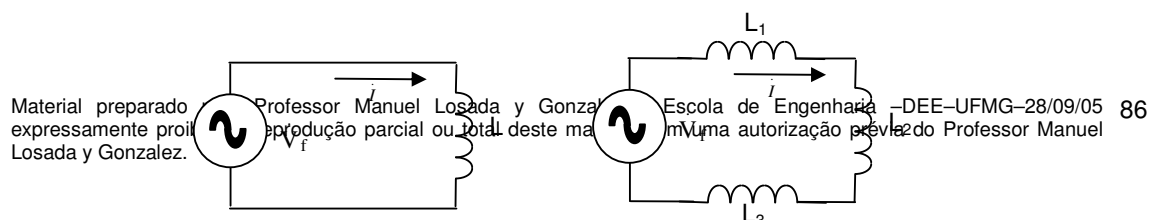
Se, por outro lado, fizermos circular uma corrente i nessa mesma bobina, a tensão em seus terminais é:

$$v = L \frac{di}{dt}. \quad (8.3)$$

Fazendo-se $i = I_m \sin(\omega t + \theta)$, então $v = \omega L I_m \cos(\omega t + \theta)$ ou $v = V_m \cos(\omega t + \theta)$, onde $V_m = \omega L I_m$. Fasorialmente, tem-se $\dot{I} = I \angle \theta$ e $\dot{V} = V \angle \theta + 90^\circ$

8.5 1ª. e 2ª. LEIS DE KIRCHHOFF

Seja o circuito da Figura 8.6a. Em um dado instante, tem-se uma elevação de tensão na fonte de tensão $\dot{V}_f$ e uma queda de tensão V_L no indutor de indutância L . Da mesma forma, no circuito da Figura 8.6b, tem-se uma elevação de tensão na fonte de tensão $\dot{V}_f$ e quedas de tensão V_{L1} , V_{L2} e V_{L3} nos indutores de indutâncias L_1 , L_2 e L_3 .



a)

b)

Figura 8.6 – circuitos simples com indutância

Em um circuito com indutores, as leis de Kirchhoff continuam valendo. Assim, para a 1ª. lei de Kirchhoff,

$$\sum_{i=1}^{i=n} \dot{V}_i = \sum_{j=1}^{j=m} \dot{V}_j, \quad (8.4)$$

sendo n o número de elevações de potencial dentro de um caminho fechado de um circuito e m o número de quedas de tensão. A 2ª. lei de Kirchhoff é

$$\sum_{i=1}^{i=n} \dot{I}_i = \sum_{j=1}^{j=m} \dot{I}_j, \quad (8.5)$$

sendo n o número de correntes entrando no nó e m o número de correntes saindo do mesmo.

8.6 INDUTÂNCIAS EQUIVALENTES

8.6.1 CIRCUITO SÉRIE

Seja o circuito da Figura 8.7a, onde se tem uma fonte de tensão alternada alimentando três indutores ligados em série. Pela equação 8.4, tem-se

$$\dot{V}_f = \dot{V}_{L1} + \dot{V}_{L2} + \dot{V}_{L3}.$$

Como

$$v_{L1} = L_1 \frac{di}{dt}, \quad v_{L2} = L_2 \frac{di}{dt}, \quad v_{L3} = L_3 \frac{di}{dt} \quad \text{e} \quad v_{Leq} = L_{eq} \frac{di}{dt},$$

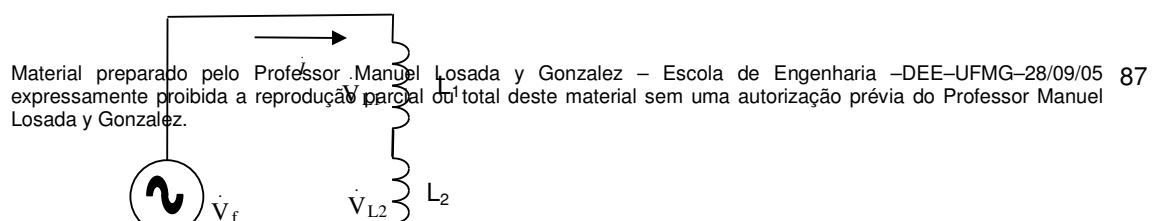
então

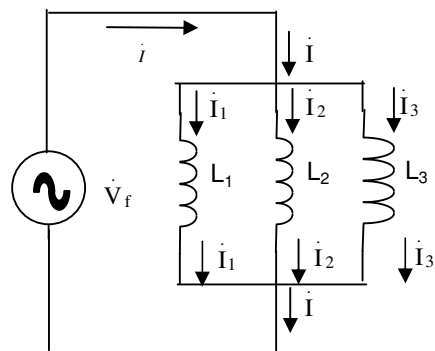
$$L_{eq} \frac{di}{dt} = L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} + L_3 \frac{di}{dt}$$

ou

$$L_{eq} = L_1 + L_2 + L_3.$$

Assim, a indutância equivalente de um conjunto de indutores ligados em série é igual a soma das indutâncias desses indutores. Este equivalente é igual ao equivalente de resistores em série.





a)

b)

Figura 8.7 – indutores ligados em série em paralelo.

8.6.2 CIRCUITO PARALELO

No circuito da Figura 8.7b, tem uma fonte de tensão alternada alimentando três indutores ligados em paralelo. Pela equação 8.5, tem-se

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3.$$

Mas

$$v = L_1 \frac{di_1}{dt}, v = L_2 \frac{di_2}{dt}, v = L_3 \frac{di_3}{dt} \text{ e } v = L_{eq} \frac{di}{dt},$$

então

$$v = L_{eq} \frac{di}{dt} = L_{eq} \frac{d(i_1 + i_2 + i_3)}{dt} = L_{eq} \left[\frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} + \frac{di_3}{dt} \right]$$

ou

$$v = L_{eq} \left[\frac{v}{L_1} + \frac{v}{L_2} + \frac{v}{L_3} \right]$$

ou

$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3}$$

Assim, o inverso de indutância equivalente de um conjunto de indutores ligados em paralelo é igual a soma dos inversos das indutâncias desses indutores. Este equivalente é igual ao equivalente de resistores em paralelo.

8.7 LEI DE OHM

Quando se aplica uma tensão alternada em um indutor que tem uma indutância L , a equação (7.7) continua valendo. Essa equação é:

$$\dot{I} = \frac{\dot{V}}{\dot{Z}}, \quad (7.7)$$

onde $\dot{I}$ e $\dot{V}$ são a corrente e a tensão com anotações fasoriais, e $\dot{Z}$ é um número complexo que representa a impedância. Este $\dot{Z}$ tem, na parte imaginária, a reatância que é calculada como:

$$X_L = \omega L, \quad (8.4)$$

onde $\omega = 2\pi f$ e X_L é a reatância indutiva dada em ohm $[\Omega]$. Isto pode ser visto através da equação (8.3).

No circuito da Fig. 8.6a, tem-se $R = 0$, $X_L = \omega L = 2\pi f L$, $\dot{Z} = R + jX_L = 0 + jX_L = X_L \angle 90^\circ$. Então, a corrente no indutor será: $\dot{I} = \dot{V} / \dot{Z} = V \angle \alpha / X_L \angle 90^\circ = (V/X_L) \angle \alpha - 90^\circ$. Se $\alpha = 0^\circ$, as ondas de tensão e corrente no indutor têm as formas apresentadas na Fig. 8.6b. Pode-se notar que para $t = 0^\circ$, a onda de tensão tem um valor zero e a onda de corrente tem um valor máximo negativo. Quando $t = 90^\circ$, a onda de tensão tem um valor máximo positivo e a onda de corrente um valor zero. Então a onda de corrente está *atrasada* (defasada) 90° da onda de tensão.



Fig. 8.6 – Tensão e corrente em um indutor

8.8 CÁLCULO DE CORRENTE E QUEDAS DE TENSÃO EM CIRCUITOS SÉRIE-PARALELOS

O cálculo de corrente e quedas de tensão em circuitos série, paralelo ou série-paralelo de tensão alternada com indutores é igual ao cálculo de corrente e quedas de tensão dos circuitos em tensão alternada com resistores, transformando as indutâncias em reatâncias e as considerando-as na parte imaginária das impedâncias.

A impedância equivalente de conjuntos série ou paralelo de impedâncias é feito da mesma forma que se faz com resistência, porém usando números complexos.

Para duas impedâncias em série tem-se $\dot{Z}_{eq} = \dot{Z}_1 + \dot{Z}_2$. Para duas impedâncias em paralelo tem-se

$$\dot{Z}_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{\dot{Z}_1} + \frac{1}{\dot{Z}_2}}.$$

8.9 POTÊNCIA EM INDUTORES

A potência em indutores ou cargas indutivas puras pode ser determinada das formas seguintes:

- usando a corrente na forma fasorial

$$Q = X_L \dot{I} \dot{I}^* \quad (8.7)$$

- usando o módulo da corrente

$$Q = X_L I^2. \quad (8.8)$$

Essas equações são iguais às equações de cálculo de potência em resistências, com as modificações de Q no lugar de P e X_L no lugar de R.

A potência Q em um indutor é denominada de *potência reativa* e tem como unidade o VAR.

Instantaneamente, enquanto que em um circuito puramente resistivo, a potência P (denominada de *potência dissipada*, *potência joulica*, *potência ativa*, e tem como unidade o W) sai do circuito através de uma transformação de energia elétrica em energia térmica, luminosa ou mecânica (ver Fig. 8.7a), a potência reativa Q circula pelo circuito puramente indutivo e não sai desse circuito (ver Fig. 8.7b). Em certos momentos, a potência reativa é positiva e em outros momentos é negativa. Isto significa que nos momentos de Q positiva, a energia elétrica entra no indutor e é transformada em energia eletromagnética, e, nos momentos negativos, essa energia eletromagnética é transformada em energia elétrica e volta no circuito.

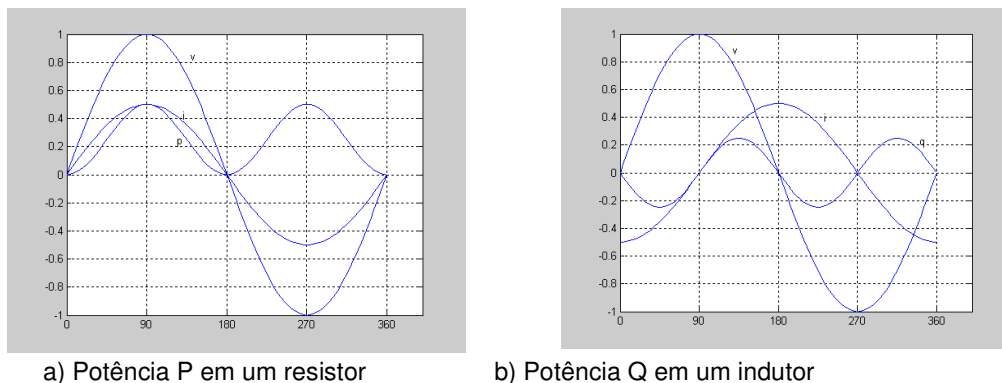


Fig. 8.7

Problemas Propostos

8.1 Provar que a reatância indutiva em um indutor puro é ωL .

8.2 Provar que a reatância equivalente total de um conjunto série de reatâncias indutivas é igual à soma das reatâncias indutivas.

8.3 Provar que o inverso da reatância equivalente total de um conjunto paralelo de reatâncias indutivas é igual a soma dos inversos das reatâncias indutivas.

8.4 Provar que a impedância equivalente total de um conjunto série de impedâncias é igual à soma das impedâncias.

8.5 Provar que o inverso da impedância equivalente total de um conjunto paralelo de impedâncias é igual a soma dos inversos das impedâncias.

8.6 Seja $f = 60\text{Hz}$. Achar os equivalentes de indutância, reatância indutiva e impedância na Figura 8.8a.

8.7 Repetir os cálculos de equivalentes de reatância indutiva e impedância no problema 8.6 para $f = 300\text{ Hz}$ e comparar os valores, observando o que aconteceu com o aumento de cinco vezes o valor

da frequência inicial.

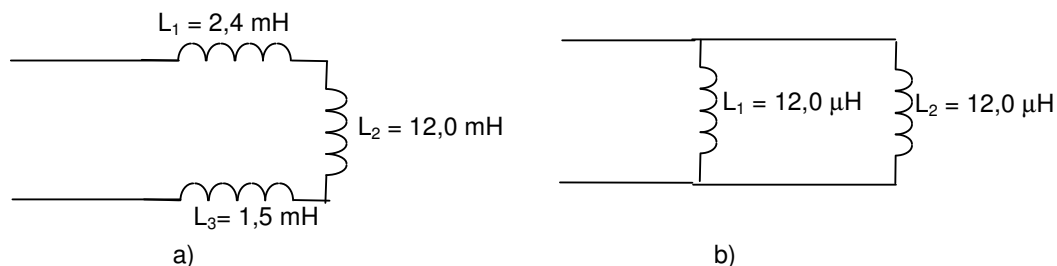


Figura 8.8 – circuitos dos Problemas 8.6, 8.7, 8.8 e 8.9

8.8 Seja $f = 60\text{Hz}$. Achar os equivalentes de indutância, reatância indutiva e impedância na Figura 8.8b.

8.9 Repetir os cálculos de equivalentes de reatância indutiva e impedância no problema 8.6 para $f = 300\text{ Hz}$ e comparar os valores, observando o que aconteceu com o aumento de cinco vezes o valor da frequência inicial.

8.10 Seja $f = 60\text{Hz}$. Achar os equivalentes de indutância, reatância indutiva e impedância na Figura 8.9.

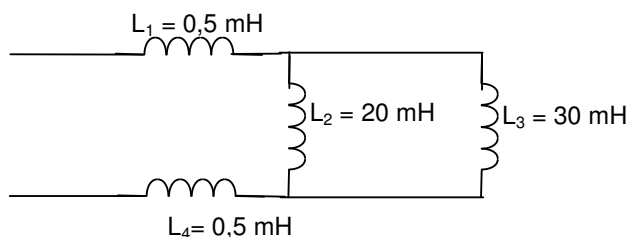


Figura 8.9 – circuito do Problema 8.10

8.11 Seja o circuito da Figura 8.10. Determinar para $f = 60\text{ Hz}$:

- a – a impedância equivalente total do circuito;
- b – a corrente que sai da fonte de tensão;

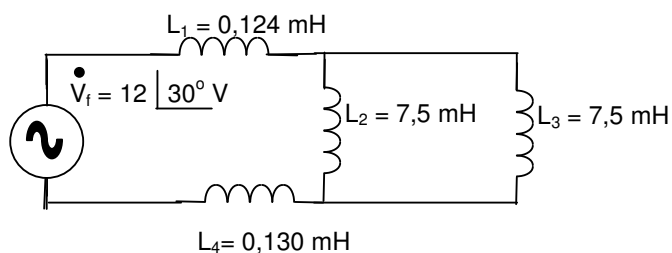


Figura 8.10 – circuito do Problema 8.11

8.12 Para o mesmo circuito da Figura 8.10, determinar para a mesma frequência:

- a – a queda de tensão, a corrente e a potência reativa em L_2 .
- b – a potência total que sai e volta à fonte.

Respostas

8.6
8.7
8.8
8.9
8.10
8.11
8.12

REFERÊNCIAS.

- [1] J. O' Malley, *Análise de Circuitos*, 2a. edição, Schaum McGraw-Hill.
- [2] R. A. Bartkowiak, *Circuitos Elétricos*, Makron Books do Brasil Editora Ltda, 1994.
- [3] Resnick, Halliday e Krane, *Física 3*, 4ª. edição, 1996.
- [4] J. W. Nilson, Susan A. Riedel, *Circuitos Elétricos*, 5a. edição, LTC Editora.
- [5] www.ee.pucrs.br/~virgilio/Materiais_Eletricos/17%20-%20Materiais%20Magn%E9ticos.DOC,
27/09/2005
- [6] R. M. Rose, I. A. Shepard, J. Wulf, *Propiedades Electronics*, 1965.
- [7] B. L. Goodlet, *Eletroctecnica Fundamental*, José Montesó, 1961.