

CAPÍTULO 12

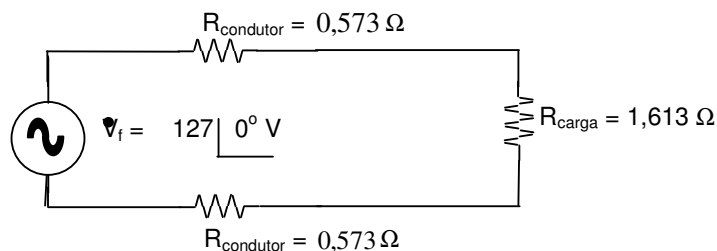
CIRCUITOS E CARGAS TRIFÁSICAS

Quando temos cargas elétricas grandes ou necessitamos de transmitir energia elétrica por longas distâncias aparecem algumas dificuldades. Como vimos no capítulo anterior, as quedas de tensão nos condutores elétricos que alimentam as cargas podem se tornar grandes e, conseqüentemente, as perdas elétricas de energia e potência. Essas dificuldades devem ser contornadas através de novos recursos e equipamentos. No mesmo capítulo anterior vimos transformadores e neste capítulo estudaremos os circuitos e as cargas trifásicas.

12.1 INTRODUÇÃO

Vamos voltar a considerar a carga de aquecimento (puramente resistiva) de 10 kW de potência ativa na tensão de 127 V do capítulo 11, admitindo as mesmas considerações anteriores, ou seja, que a carga se aqueça e aqueça algum material com a temperatura variando linearmente com a tensão elétrica aplicada na mesma, de forma que, para uma potência de 10 kW, se tenha uma elevação de 80°C a partir de uma temperatura ambiente de 20°C. A resistência elétrica da carga continue sendo considerada constante com a variação da temperatura. A tensão mínima de funcionamento da carga seja de 114,3 V (90% de 127V). Além disto, que essa carga continue sendo alimentada diretamente por uma fonte de tensão alternada de $127 \angle 0^\circ$ V, através de um circuito com 50 m de comprimento de um condutor de cobre de seção transversal de 1,5 mm² (admita, por simplificação que o condutor esteja na temperatura de 20°C e que a sua reatância indutiva seja desprezível diante do valor de resistência).

Como vimos no mesmo capítulo, o circuito elétrico que alimenta essa carga pode ser representado por:



Vimos também que:

$$I = 46,03 \angle 0^\circ \text{ A.}$$

$$V_{\text{carga}} = 74,25 \angle 0^\circ \text{ V.}$$

$$\text{Queda de tensão nos dois condutores} = 52,75 \angle 0^\circ \text{ V.}$$

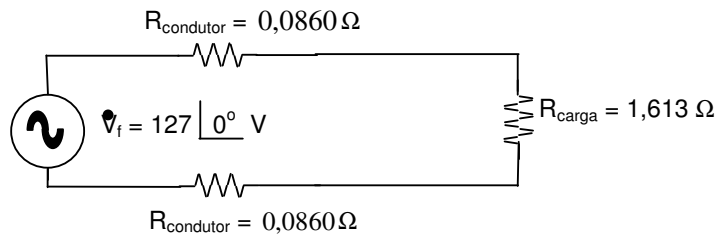
$$P_{\text{carga}} = 3418 \text{ W.}$$

$$\text{Aquecimento} = 80^\circ \text{ C} \times 3418 / 10.000 = 27,34^\circ \text{ C}$$

$$\text{Temperatura final da carga} = 20 + 27,34 = 47,34^\circ \text{ C}$$

Pôde-se notar que nessa instalação, a carga só atinge 34,18% da elevação de temperatura devido a baixa tensão na mesma.

Se alterarmos a seção transversal do condutor de 1,5 mm² para 10 mm² tem-se:



$$I = 71,15 \angle 0^\circ \text{ A.}$$

$$V_{Carga} = 114,77 \angle 0^\circ \text{ V.}$$

$$\text{Queda de tensão nos dois condutores} = 12,24 \angle 0^\circ \text{ V.}$$

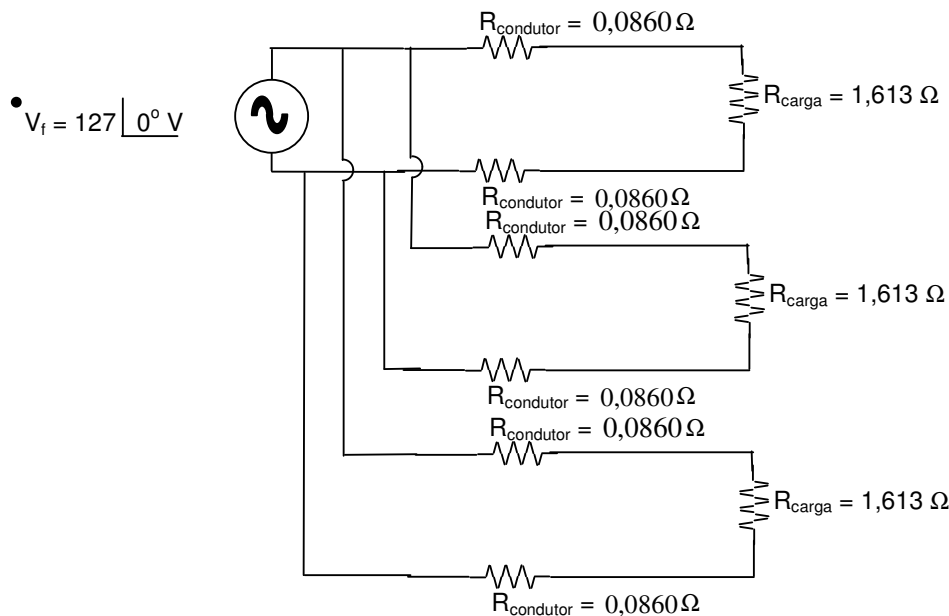
$$P_{carga} = 8166 \text{ W.}$$

$$\text{Aquecimento} = 80^\circ \text{ C} \times 8166 / 10.000 = 65,33^\circ \text{ C}$$

$$\text{Temperatura final da carga} = 20 + 65,33 = 85,33^\circ \text{ C}$$

Nota-se então que a carga atinge 81,66% da elevação de temperatura final e que a instalação é aceitável para as condições previstas. Entretanto, de acordo com o capítulo 11, o custo de 100 m de condutores saltou de R\$ 38,00 para R\$ 235,00, pois o condutor de seção $1,5 \text{ mm}^2$ custa R\$ 0,38 o metro e o condutor de 10 mm^2 custa R\$ 2,35 o metro, conforme o Quadro 11.1.

Este é um exemplo bastante simples. Vamos admitir uma situação onde tenhamos 3 cargas iguais à carga acima, em um mesmo local. Então, se elas estão alimentadas a partir da mesma fonte de tensão, e seus condutores com os mesmos comprimentos, teremos o circuito abaixo:



Nota-se que se tem 6 condutores saindo da fonte de alimentação e alimentando as 3 cargas. Conseqüentemente, o custo dos condutores será R\$ 705,00 e se gasta 300 metros de condutores.

12.2 FONTE DE TENSÃO TRIFÁSICA

Uma fonte de tensão trifásica é constituída por três linhas A, B e C e um neutro, como mostrado na Fig. 12.1a, ou simplesmente da forma mostrada na Fig. 12.2b.

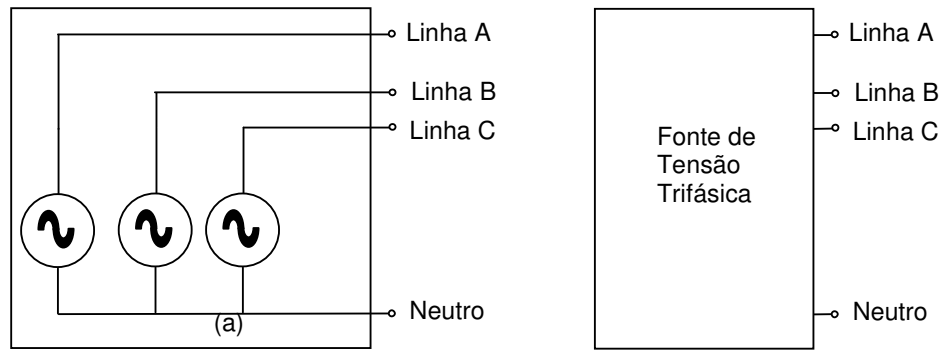


Fig. 12.1 – Fonte de tensão trifásica

Teoricamente e idealmente, as tensões das linhas para o neutro têm módulo constante e ângulos deslocados de 120° . Assim, uma das possibilidades de tensões é:

$$\dot{V}_{AN} = V \angle \alpha \quad (12.1a)$$

$$\dot{V}_{BN} = V \angle \alpha - 120^\circ \quad (12.1b)$$

$$\dot{V}_{CN} = V \angle \alpha + 120^\circ \quad (12.1c)$$

Em termos de representação fasorial, tem-se a Fig. 12.2a, e, em termos de funções senoidais, a Fig. 12.2b.

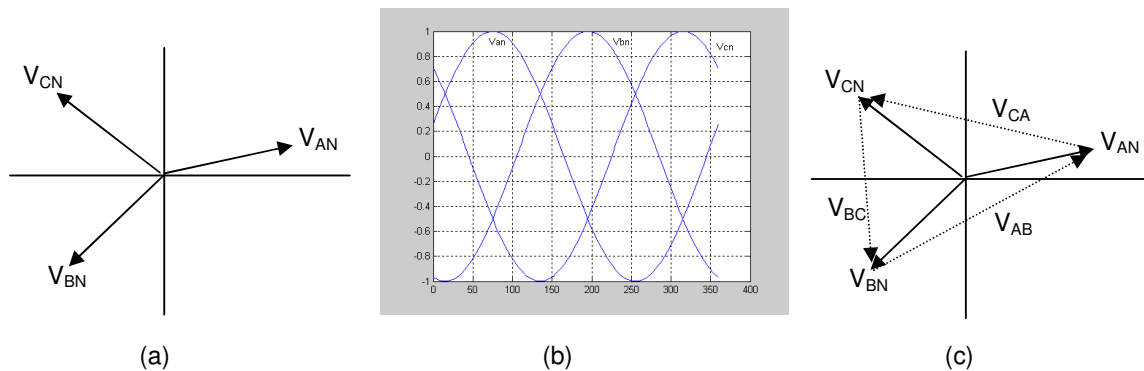


Fig.12.2 – Tensões trifásicas

As tensões entre 2 linhas são dadas por:

$$\dot{V}_{AB} = \dot{V}_{AN} - \dot{V}_{BN} \quad (12.2a)$$

$$\dot{V}_{BC} = \dot{V}_{BN} - \dot{V}_{CN} \quad (12.2b)$$

$$\dot{V}_{CA} = \dot{V}_{CN} - \dot{V}_{AN} \quad (12.2c)$$

Isto pode ser visto na Fig. 12.2c, como uma soma ou subtração de fasores. Considerando as equações (12.1a), (12.1b) e (12.1c) tem-se

$$\dot{V}_{AB} = \sqrt{3} V \angle \alpha + 30^\circ \quad (12.3a)$$

$$\dot{V}_{BC} = \sqrt{3} V \angle \alpha - 90^\circ \quad (12.3b)$$

$$\dot{V}_{CA} = \sqrt{3} V \angle \alpha + 150^\circ \quad (12.3c)$$

Exemplo 12.1: Em uma instalação elétrica tem-se a tensão da linha A para o neutro como sendo $127 \angle 0^\circ$ V. A partir das equações (12.3), calcular as 3 tensões entre linhas.

Resolução: Como $V = 127$, então:

$$\dot{V}_{AB} = \sqrt{3} \times 127V \angle 0 + 30^\circ = 220 \angle 30^\circ \text{ V}$$

$$\dot{V}_{BC} = \sqrt{3} \times 127V \angle 0 - 90^\circ = 220 \angle -90^\circ \text{ V}$$

$$\dot{V}_{CA} = \sqrt{3} \times 127V \angle 0 - 150^\circ = 220 \angle 150^\circ \text{ V}$$

12.3 ALIMENTAÇÃO DE CARGAS COM UMA FONTE DE TENSÃO TRIFÁSICA

Uma carga pode ser alimentada a partir de uma linha (A, B ou C) e o neutro da fonte (como mostrado na Fig. 12.3a para a carga de 10 kW da introdução), ou a partir de duas linhas dessa fonte (como mostrado na Fig. 12.3b). Cuidado deve-se ter para a diferença entre as tensões nas duas situações.

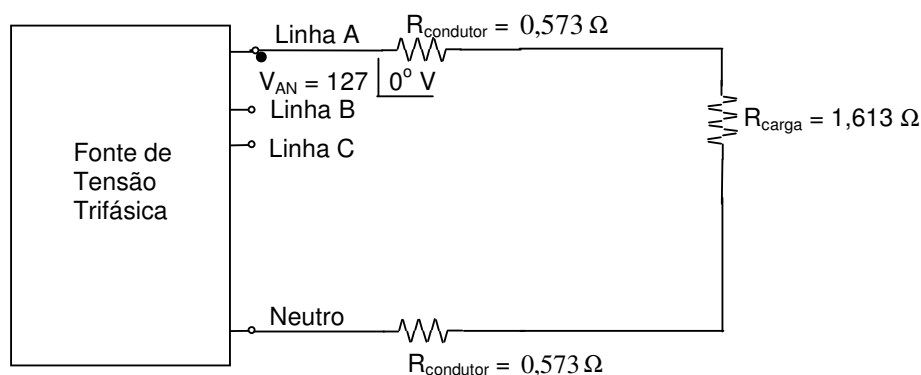


Fig. 12.3a – Alimentação da carga de 10 kW a partir de uma fonte de tensão trifásica

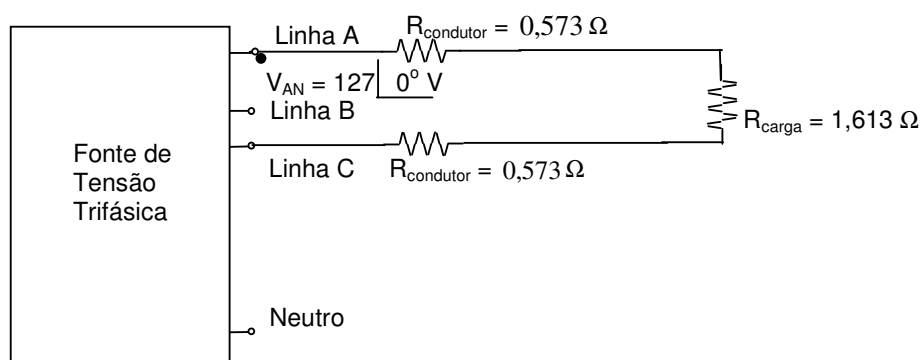


Fig. 12.3b – Alimentação de uma carga a partir de 2 linhas de uma fonte de tensão trifásica

As 3 cargas de 10kW da mesma introdução podem ser alimentadas a partir de uma linha e o neutro, como mostrado na Fig.12.4a, ou entre duas linhas, como mostrado na Fig.12.4b, ou cada carga pode ser alimentada a partir de uma linha diferente e o neutro, como mostrado na Fig. 12.4c. Existe também a possibilidade das 3 cargas serem alimentadas somente a partir das 3 fases sem a utilização do neutro.

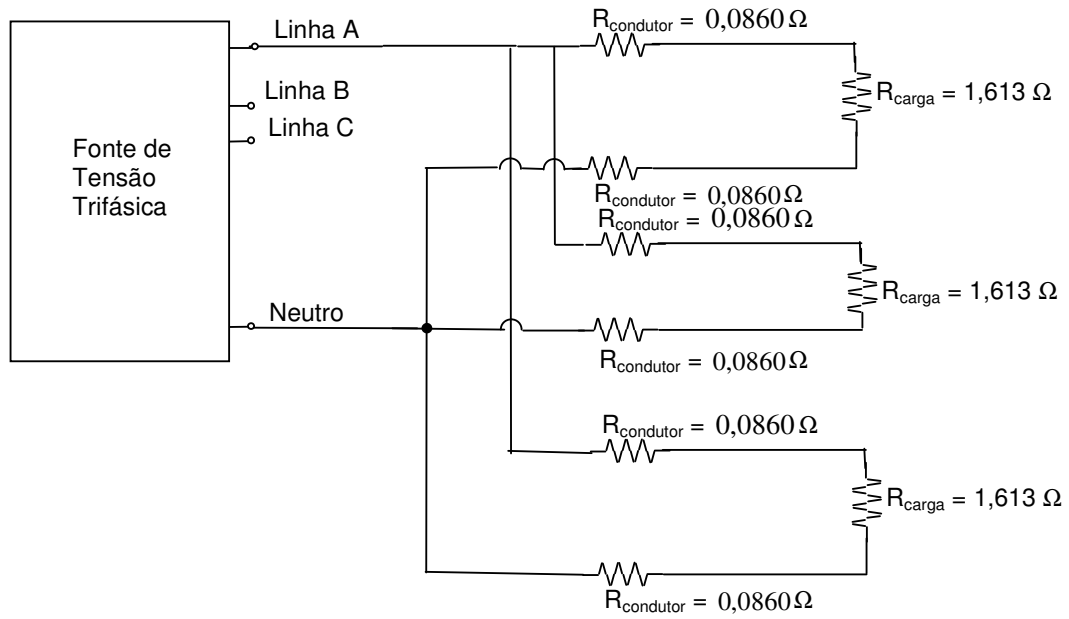


Fig. 12.4a – 3 cargas de 10kW ligadas em uma linha e o neutro

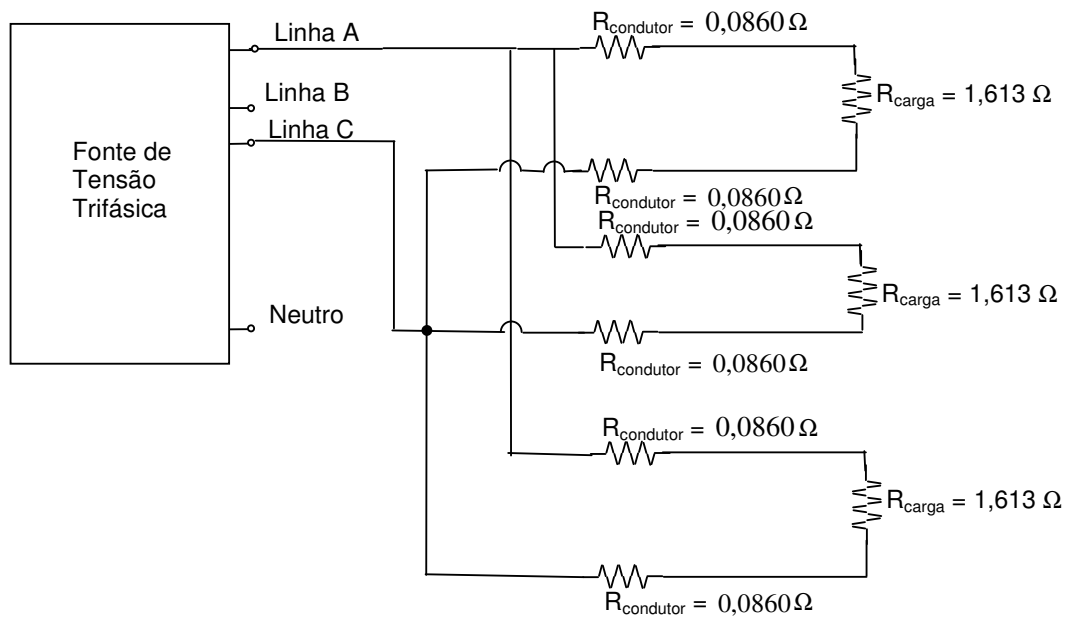


Fig. 12.4b – 3 cargas de 10kW ligadas em duas linhas diferentes

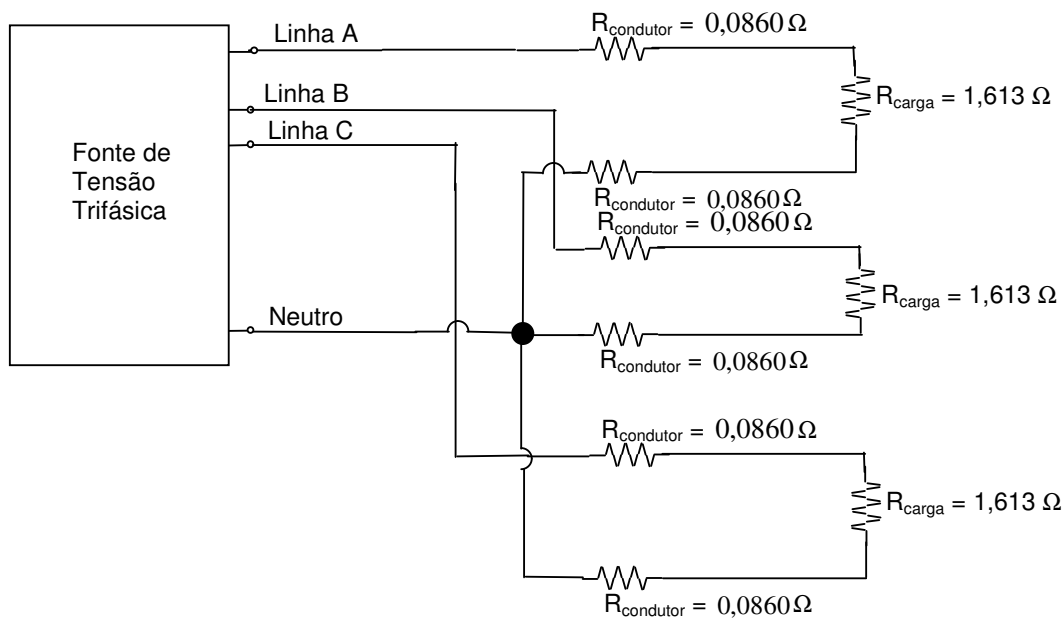


Fig. 12.4c – 3 cargas de 10kW ligadas em 3 linhas diferentes e o neutro

Na situação da Fig. 12.4c, quando as 3 cargas estão próximas, pode-se ligá-las como mostrado na Fig. 12.5. O circuito terá somente 3 condutores de linha e um único condutor de neutro, totalizando 4 condutores, ao invés de 6 condutores, como nas figuras anteriores. Esse já é um ganho para o uso de circuitos trifásicos.

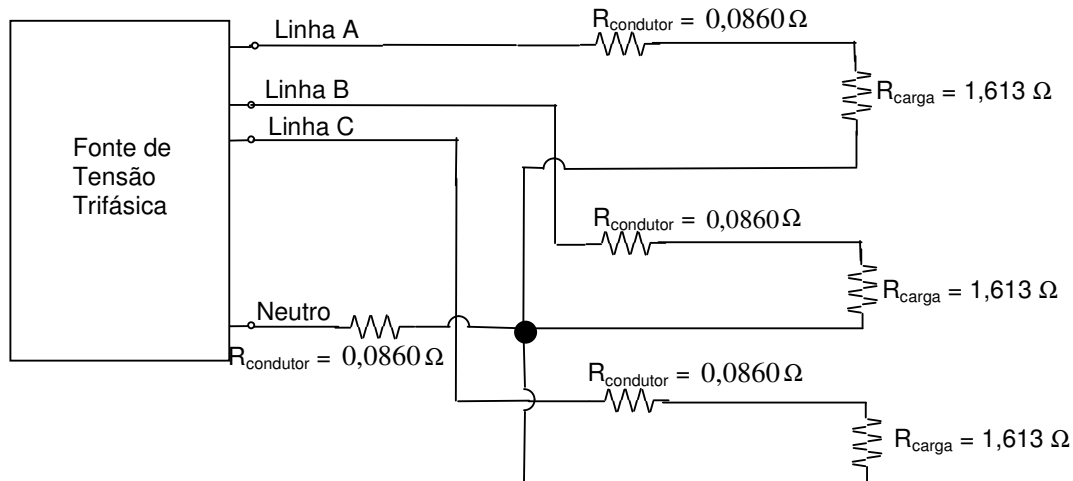


Fig. 12.5 – redução de dois condutores para a alimentação das cargas

Esse circuito pode ser re-desenhado de tal forma a ficar na forma mostrada na Fig. 12.6. As resistências das cargas R_{carga} estão dispostas formando a letra Y. Essa disposição de conexão das R_{cargas} é denominada de *conexão em Y* ou *estrela a 4 fios* (condutores).

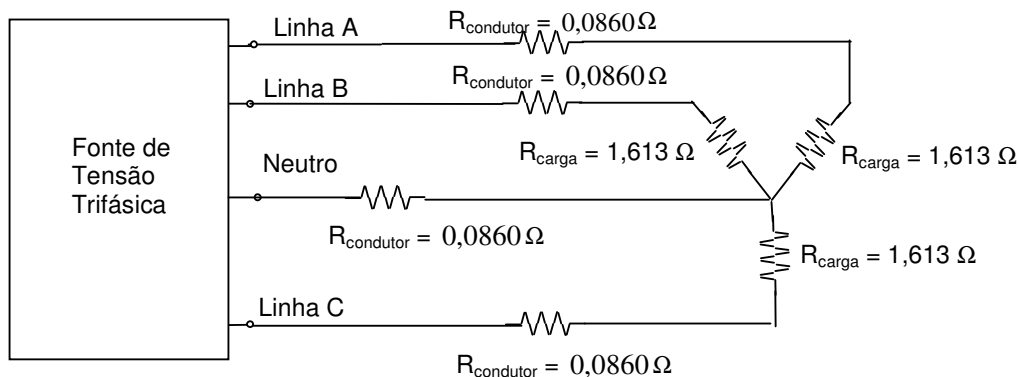


Fig. 12.6 – Ligação das R_{cargas} em Y a 4 fios

Em condições específicas, pode-se observar que a corrente de neutro I_N é igual a zero. Assim, podemos também eliminar o condutor de neutro, ficando somente com os 3 condutores de linha para alimentar as 3 cargas, como mostrado na Fig. 12.7a. Essa ligação é denominada de *conexão Y a 3 condutores* ou *ligação estrela a 3 condutores*.

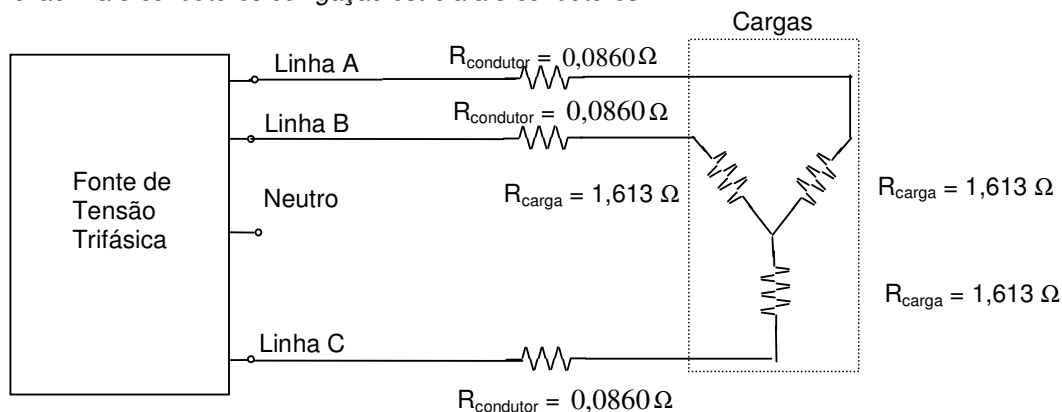


Fig. 12.7a – Ligação das R_{cargas} em Y a 3 fios

Por outro lado, se as 3 cargas de 10 kW constituírem uma carga maior de 30 kW com três resistências, então essa carga maior poderá ser alimentada somente pelos 3 condutores de linhas, ao invés dos 6 condutores, como mostrado na Fig. 12.7b. Esse é o grande ganho dos circuitos trifásicos.

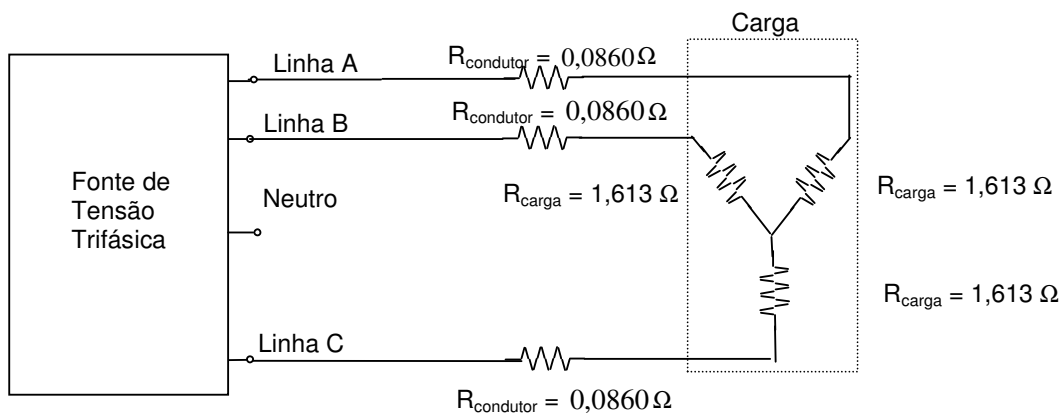


Fig. 12.7 – Ligação das R_{cargas} em Y a 3 fios

Uma outra possibilidade das 3 cargas de 10 kW serem alimentadas somente a partir das 3 linhas sem a utilização do neutro é a conexão das resistências em triângulo (ou delta - Δ) como mostrado na Fig. 12.8. Também é uma ligação com 3 condutores e é denominada de *conexão Δ* ou *ligação triângulo*.

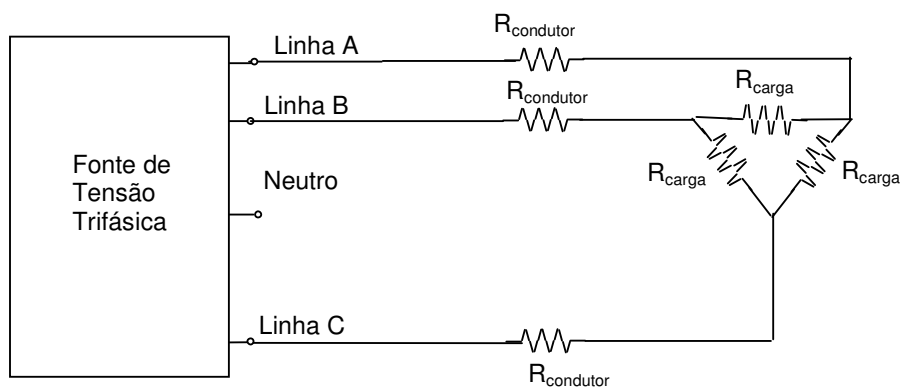


Fig. 12.8 – Ligação das R_{cargas} em Δ

Todas as considerações feitas acima valem tanto para cargas resistivas quanto para as demais cargas (indutivas, capacitivas).

Uma carga trifásica é constituída por três impedâncias ligadas em Y ou Δ .

Normalmente as cargas com potências acima de 5 kVA são trifásicas. As cargas com potências abaixo de 5 kVA são monofásicas ou bifásicas.

12.4 CÁLCULOS EM CIRCUITOS TRIFÁSICOS

12.4.1 Carga trifásica com conexão estrela

Por simplicidade, vamos admitir inicialmente que a carga seja alimentada a partir de uma fonte de tensão trifásica através de condutores com impedância desprezível. Assim, tem-se a Fig. 12.9.

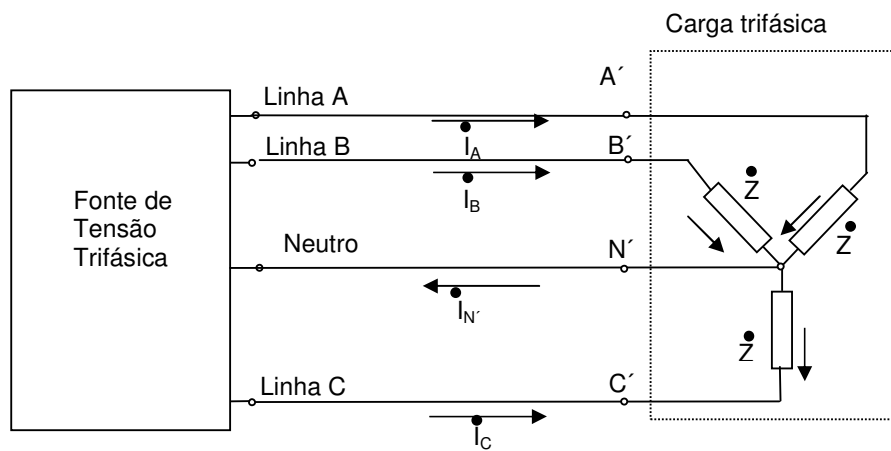


Fig. 12.9 – Carga trifásica em Y - 4 fios

As tensões entre uma linha e o neutro na carga são : $\dot{V}_{A'N'}$, $\dot{V}_{B'N'}$ e $\dot{V}_{C'N'}$. Estas tensões são denominadas de *tensões de fase*. Elas são calculadas pelo produto da corrente que circula em cada impedância e o valor de impedância, como se fosse uma impedância de um circuito monofásico.

As tensões entre duas linhas são $\dot{V}_{A'B'}$, $\dot{V}_{B'C'}$ e $\dot{V}_{C'A'}$. Elas são denominadas de *tensões de linha* e são calculadas pelas equações (12.2a), (12.2b e 12.2c).

A tensão em cada impedância da carga é denominada de tensão de fase.

A tensão entre duas linhas na carga é denominada de tensão de linha.

A corrente em cada impedância da carga é denominada de *corrente de fase*. Assim, as correntes de fase são $\dot{I}_{A'N'}$, $\dot{I}_{B'N'}$ e $\dot{I}_{C'N'}$.

A corrente que circula em cada linha são $\dot{I}_A$, $\dot{I}_B$ e $\dot{I}_C$. Elas são denominadas de *correntes de linha*.

Na conexão estrela, as correntes de linha são iguais às correntes de fase e são determinadas diretamente pela lei de ohm.

Em cada impedância tem-se uma potência aparente, uma potência ativa e uma potência reativa. Essas potências são $\dot{S}_{A'N'}$, $\dot{S}_{B'N'}$, $\dot{S}_{C'N'}$, $P_{A'N'}$, $P_{B'N'}$, $P_{C'N'}$, $Q_{A'N'}$, $Q_{B'N'}$, $Q_{C'N'}$. Elas são calculadas como se as impedâncias fizessem parte de circuitos monofásicos.

As potências totais da carga trifásica são as somas dessas potências, como mostrado nas equações 12.4a, 12.4b e 12.4c.

$$\dot{S}_{Total} = \dot{S}_{A'N'} + \dot{S}_{B'N'} + \dot{S}_{C'N'} \quad (12.4a)$$

$$P_{Total} = P_{A'N'} + P_{B'N'} + P_{C'N'} \quad (12.4b)$$

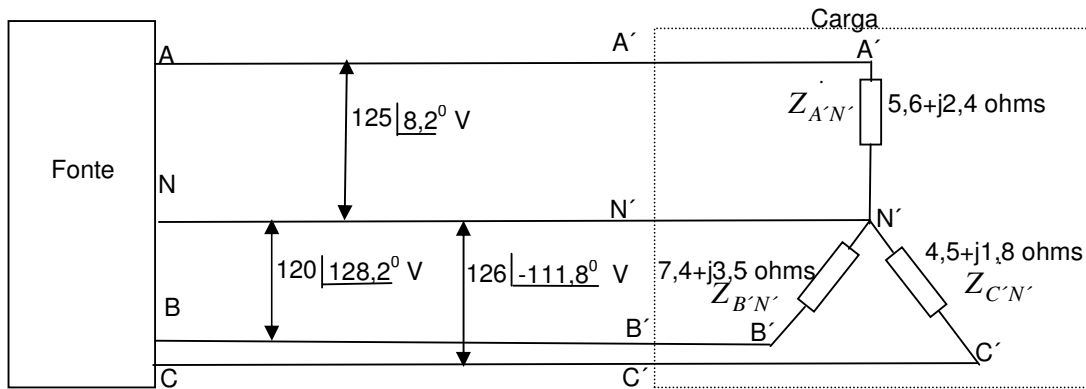
$$Q_{Total} = Q_{A'N'} + Q_{B'N'} + Q_{C'N'}. \quad (12.4c)$$

O fator de potência total da carga continua sendo a relação entre a potência ativa total e o módulo da potência aparente total.

A corrente de neutro é igual a soma fasorial das correntes de fase, ou seja:

$$\dot{I}_{N'N} = \dot{I}_{A'N'} + \dot{I}_{B'N'} + \dot{I}_{C'N'}. \quad (12.4d)$$

Exemplo 12.2: Seja o circuito apresentado abaixo.



Pede-se:

- As tensões fasoriais nas 3 fases da carga.
- As correntes fasoriais nas 3 fases da carga.
- As tensões de linha.
- As correntes de linha.

Solução: a) tensões de fase

Analisando o circuito tem-se

$$\dot{V}_{A'N'} = \dot{V}_{AN} = 125 \angle 8,2^\circ \text{ V}$$

$$\dot{V}_{B'N'} = \dot{V}_{BN} = 120 \angle 128,2^\circ \text{ V}$$

$$\dot{V}_{C'N'} = \dot{V}_{CN} = 126 \angle -111,8^\circ \text{ V}$$

Estas são as tensões de fase e estão aplicadas nas impedâncias $\dot{Z}_{A'N'}$, $\dot{Z}_{B'N'}$ e $\dot{Z}_{C'N'}$.

b) Correntes de fase

As formas polares das impedâncias na carga e correntes são:

$$\dot{Z}_{A'N'} = 5,6 + j2,4 = 6,09 \angle 23,2^\circ \Omega$$

$$\dot{I}_{A'N'} = \dot{V}_{A'N'} / \dot{Z}_{A'N'} = 20,5 \angle -15,0^\circ \text{ A}$$

$$\dot{Z}_{B'N'} = 7,4 + j3,5 = 8,19 \angle 25,3^\circ \Omega$$

$$\dot{I}_{B'N'} = \dot{V}_{B'N'} / \dot{Z}_{B'N'} = 14,7 \angle 102,9^\circ \text{ A}$$

$$\dot{Z}_{C'N'} = 4,5 + j1,8 = 4,85 \angle 21,80^\circ \Omega$$

$$\dot{I}_{C'N'} = \dot{V}_{C'N'} / \dot{Z}_{C'N'} = 26,0 \angle -133,6^\circ \text{ A}$$

c) tensões de linha

As tensões de linha são:

$$\dot{V}_{A'B'} = \dot{V}_{A'N'} - \dot{V}_{B'N'} = 125 \angle 8,2^\circ - 120 \angle 128,2^\circ = 212,2 \angle -21,1^\circ \text{ V}$$

$$\dot{V}_{B'C'} = \dot{V}_{B'N'} - \dot{V}_{C'N'} = 120 \angle 128,2^\circ - 126 \angle -111,8^\circ = 213,1 \angle 97,4^\circ \text{ V}$$

$$\dot{V}_{C'A'} = \dot{V}_{C'N'} - \dot{V}_{A'N'} = 126 \angle -111,8^\circ - 125 \angle 8,2^\circ = 217,4 \angle -141,7^\circ \text{ V}.$$

d) Correntes de linha

As correntes de linha são iguais as correntes de fase. Assim:

$$\dot{I}_{AN} = \dot{I}_{A'N'} = 20,5 \angle -15,0^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_{BN} = \dot{I}_{B'N'} = 14,7 \angle 102,9^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_{CN} = \dot{I}_{C'N'} = 26,0 \angle -133,6^\circ \text{ A}$$

Exemplo 12.3: Para o mesmo circuito acima, pede-se:

- As potências aparente, ativa e reativa nas fases.
- As potências aparente, ativa e reativa totais da carga.
- O fator de potência total.
- A corrente de neutro.

Solução: a) Potências nas fases

- Na fase A'N'

$$S_{A'N'} = V_{A'N'} \dot{I}_{A'N'}^* = 125 \angle 8,2^\circ \cdot 20,5 \angle 15,0^\circ = 2564,6 \angle 23,2^\circ \text{ VA.}$$

$$P_{A'N'} = S_{A'N'} \cos(\text{ângulo de } Z_{A'N'}) = 2564,6 \cos 23,2^\circ = 2357,2 \text{ W}$$

$$Q_{A'N'} = S_{A'N'} \sin(\text{ângulo de } Z_{A'N'}) = 2564,6 \sin 23,2^\circ = 1010,3 \text{ VAR.}$$

- Na fase B'N'

$$S_{B'N'} = V_{B'N'} \dot{I}_{B'N'}^* = 120 \angle 128,2^\circ \cdot 14,7 \angle -102,9^\circ = 1759,1 \angle 25,3^\circ \text{ VA.}$$

$$P_{B'N'} = S_{B'N'} \cos(\text{ângulo de } Z_{B'N'}) = 1759,1 \cos 25,3^\circ = 1590,2 \text{ W}$$

$$Q_{B'N'} = S_{B'N'} \sin(\text{ângulo de } Z_{B'N'}) = 1759,1 \sin 25,3^\circ = 752,1 \text{ VAR.}$$

- Na fase C'N'

$$S_{C'N'} = V_{C'N'} \dot{I}_{C'N'}^* = 126 \angle -111,8^\circ \cdot 26,0 \angle -133,6^\circ = 3275,7 \angle 21,8^\circ \text{ VA.}$$

$$P_{C'N'} = S_{C'N'} \cos(\text{ângulo de } Z_{C'N'}) = 3275,7 \cos 21,8^\circ = 3041,4 \text{ W}$$

$$Q_{C'N'} = S_{C'N'} \sin(\text{ângulo de } Z_{C'N'}) = 3275,7 \sin 21,8^\circ = 1216,6 \text{ VAR.}$$

b) Potências totais

Pelas equações 12.4a, 12.4b e 12.4c:

$$S_{Total} = S_{A'N'} + S_{B'N'} + S_{C'N'} = 2564,6 \angle 23,2^\circ + 1759,1 \angle 25,3^\circ + 3275,7 \angle 21,8^\circ = 7597,2 \angle 23,1^\circ \text{ VA}$$

$$P_{Total} = P_{A'N'} + P_{B'N'} + P_{C'N'} = 2357,2 + 1590,2 + 3041,4 = 6988,8 \text{ W}$$

$$Q_{Total} = Q_{A'N'} + Q_{B'N'} + Q_{C'N'} = 1010,3 + 752,1 + 1216,6 = 2979,0 \text{ VAR}$$

c) fator de potência total

$$FP_{Total} = \frac{P_{Total}}{S_{Total}} = \frac{6988,8}{7597,2} = 0,920$$

d) Corrente de neutro

$$\begin{aligned} \dot{I}_{N'N} &= \dot{I}_{A'N'} + \dot{I}_{B'N'} + \dot{I}_{C'N'} \\ &= 20,5 \angle -15,0^\circ + 14,7 \angle 102,9^\circ + 26,0 \angle -133,6^\circ = 9,94 \angle -97,98^\circ \text{ A.} \end{aligned}$$

Circuitos equilibrados: Considerando ainda a Fig. 12.9, e admitindo-se que as três impedâncias da carga sejam iguais, como $Z_{A'N'} = Z_{B'N'} = Z_{C'N'} = Z_F = Z \angle \theta$, e que as tensões sejam iguais em módulo e deslocadas de 120° , como $V_{A'N'} = V_F \angle \alpha$, $V_{B'N'} = V_F \angle \alpha - 120^\circ$ e $V_{C'N'} = V_F \angle \alpha + 120^\circ$, o circuito é denominado de *circuito equilibrado*. Neste caso, os cálculos ficam bem simplificados como mostrado abaixo, onde:

a) tensões de linha

$$V_{A'B'} = \sqrt{3} V_F \angle \alpha + 30^\circ = V_L \angle \alpha + 30^\circ \quad (12.5a)$$

$$V_{B'C'} = V_L \angle \alpha - 90^\circ \quad (12.5b)$$

$$V_{C'A'} = V_L \angle \alpha + 150^\circ \quad (12.5c)$$

$$\text{onde } V_L = \sqrt{3} V_F. \quad (12.5d)$$

b) correntes de fase

$$I_{A'N'} = \frac{V_F}{Z_F} \angle \alpha - \theta = I_F \angle \alpha - \theta \quad (12.5e)$$

$$I_{B'N'} = I_F \angle \alpha - \theta - 120^\circ \quad (12.5f)$$

$$I_{C'N'} = I_F \angle \alpha - \theta + 120^\circ \quad (12.5g)$$

$$\text{onde } I_F = \frac{V_F}{Z_F}. \quad (12.5h)$$

c) correntes de linha

Iguais as de fase.

d) Potências nas fases

Potências aparentes

$$S_{A'N'} = S_{B'N'} = S_{C'N'} = S_F = S_F \angle \theta, \quad (12.5i)$$

Onde θ continua sendo o ângulo da impedância de fase.

Potências ativas

$$P_{A'N'} = P_{B'N'} = P_{C'N'} = P_F = S_F \cos \theta, \quad (12.5j)$$

Potências reativas

$$Q_{A'N'} = Q_{B'N'} = Q_{C'N'} = Q_F = S_F \sin \theta. \quad (12.5k)$$

d) Potências totais da carga

Potência aparente

$$S_{Total} = 3 S_F = 3 S_F \angle \theta, \quad (12.5l)$$

ou

$$S_{Total} = \sqrt{3} V_L I_L \angle \theta \quad (12.5m)$$

onde V_L e I_L são os módulos das tensões e correntes de linha.

Potência ativa

Como calculada anteriormente através da potência aparente, ou seja

$$P_{Total} = S_{Total} \cos \theta$$

$$\text{ou } P_{Total} = 3P_F \quad (12.5n)$$

Potência reativa

Como calculada anteriormente através da potência aparente, ou seja

$$Q_{Total} = S_{Total} \sin \theta ,$$

$$\text{ou } Q_{Total} = 3Q_F \quad (12.5o)$$

e) Fator de potência total

Como calculado anteriormente através dos módulos de potência ativa total e potência aparente total, ou seja

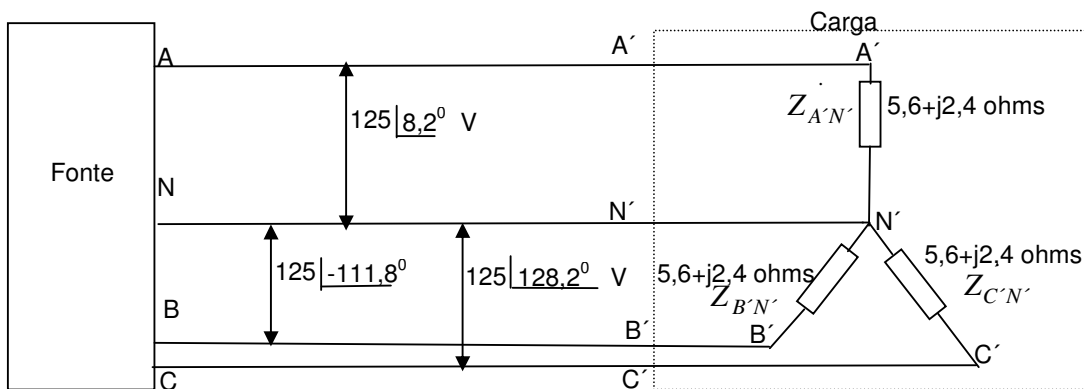
$$FP_{Total} = \frac{P_{Total}}{Q_{Total}} .$$

f) Corrente de neutro

A corrente de neutro será $I_{N'N} = 0$.

Esta é a situação onde se pode alimentar a carga com somente três condutores de linha, dispensando-se o condutor de neutro.

Exemplo 12.4: Seja o mesmo circuito apresentado no exemplo 12.2, porém com os seguintes dados:



Pede-se:

- e) As tensões fasoriais nas 3 fases da carga.
- f) As correntes fasoriais nas 3 fases da carga.
- g) As tensões de linha.
- h) As correntes de linha

Solução: Analisando os dados desse circuito, nota-se que ele é um circuito equilibrado. Então:

a) tensões de fase

$$\dot{V}_{A'N'} = \dot{V}_{AN} = 125 \angle 8,2^\circ \text{ V}$$

$$\dot{V}_{B'N'} = \dot{V}_{BN} = 125 \angle -111,8^\circ \text{ V}$$

$$\dot{V}_{C'N'} = \dot{V}_{CN} = 125 \angle 128,2^\circ \text{ V}$$

$$\text{e } V_F = 125 \text{ V e } \alpha = 8,2^\circ.$$

Estas são as tensões de fase e estão aplicadas nas impedâncias $\dot{Z}_{A'N'}$, $\dot{Z}_{B'N'}$ e $\dot{Z}_{C'N'}$.

b) Correntes de fase

As formas polares das impedâncias na carga e correntes são:

$$\dot{Z}_{A'N'} = \dot{Z}_{B'N'} = \dot{Z}_{C'N'} = 5,6 + j2,4 = 6,09 \angle 23,2^\circ \Omega$$

$$\text{onde } Z_F = 6,09 \text{ e } \theta = 23,2^\circ.$$

$$\dot{I}_{A'N'} = \dot{V}_{A'N'} / \dot{Z}_{A'N'} = 20,5 \angle -15,0^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_{B'N'} = I_F \angle \alpha - \theta - 120^\circ = 20,5 \angle -15,0^\circ - 120^\circ = 20,5 \angle -135,0^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_{C'N'} = I_F \angle \alpha - \theta + 120^\circ = 20,5 \angle -15,0^\circ + 120^\circ = 20,5 \angle 105,0^\circ \text{ A}$$

c) tensões de linha

$$V_L = \sqrt{3} V_F = \sqrt{3} \cdot 125 = 216,5 \text{ V.}$$

$$\dot{V}_{A'B'} = V_F \angle \alpha + 30^\circ = 216,5 \angle 8,2^\circ + 30^\circ = 216,5 \angle 38,2^\circ \text{ V}$$

$$\dot{V}_{B'C'} = V_F \angle \alpha - 90^\circ = 216,5 \angle 8,2^\circ - 90^\circ = 216,5 \angle -81,8^\circ \text{ V}$$

$$\dot{V}_{C'A'} = V_L \angle \alpha + 150^\circ = 216,5 \angle 8,2^\circ + 150^\circ = 216,5 \angle 158,2^\circ \text{ V.}$$

d) Correntes de linha

As correntes de linha são iguais as correntes de fase. Assim:

$$\dot{I}_{AN} = \dot{I}_{A'N'} = 20,5 \angle -15,0^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_{BN} = \dot{I}_{B'N'} = 20,5 \angle -135^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_{CN} = \dot{I}_{C'N'} = 20,5 \angle 105^\circ \text{ A.}$$

Exemplo 12.5: Para o mesmo circuito acima, pede-se:.

- As potências aparente, ativa e reativa nas fases.
- As potências aparente, ativa e reativa totais da carga.
- O fator de potência total.
- A corrente de neutro.

Solução: a) Potências nas fases

- Na fase A'N'

$$S_{A'N'} = \dot{V}_{A'N'} \dot{I}_{A'N'}^* = 125 \angle 8,2^\circ \cdot 20,5 \angle 15,0^\circ = 2564,6 \angle 23,2^\circ \text{ VA.}$$

$$P_{A'N'} = S_{A'N'} \cos(\text{ângulo de } \dot{Z}_{A'N'}) = 2564,6 \cos 23,2^\circ = 2357,2 \text{ W}$$

$$Q_{A'N'} = S_{A'N'} \sin(\text{ângulo de } Z_{A'N'}) = 2564,6 \sin 23,2^\circ = 1010,3 \text{ VAR.}$$

- Na fase B'N'

$$S_{B'N'} = S_{A'N'} = 2564,6 \angle 23,2^\circ \text{ VA.}$$

$$P_{B'N'} = P_{A'N'} = 2357,2 \text{ W}$$

$$Q_{B'N'} = 1010,3 \text{ VAR.}$$

- Na fase C'N'

$$S_{C'N'} = S_{A'N'} = 2564,6 \angle 23,2^\circ \text{ VA.}$$

$$P_{C'N'} = P_{A'N'} = 2357,2 \text{ W}$$

$$Q_{C'N'} = 1010,3 \text{ VAR.}$$

b) Potências totais

Pelas equações 12.4a , 12.4b e 12.4c:

$$S_{Total} = S_{A'N'} + S_{B'N'} + S_{C'N'} = 3 \cdot 2564,6 \angle 23,2^\circ = 7693,8 \angle 23,2^\circ \text{ VA}$$

$$P_{Total} = P_{A'N'} + P_{B'N'} + P_{C'N'} = 3 \cdot 2357,2 = 7071,6 \text{ W}$$

$$Q_{Total} = Q_{A'N'} + Q_{B'N'} + Q_{C'N'} = 3 \cdot 1010,3 = 3030,9 \text{ VAR}$$

c) fator de potência total

$$FP_{Total} = \frac{P_{Total}}{S_{Total}} = \frac{7071,6}{7693,8} = 0,919$$

d) Corrente de neutro

$$\begin{aligned} I_{N'N} &= I_{A'N'} + I_{B'N'} + I_{C'N'} \\ &= 20,5 \angle -15,0^\circ + 20,5 \angle -135^\circ + 20,5 \angle 105^\circ = 0 \angle 0^\circ \text{ A.} \end{aligned}$$

Em circuitos que se têm impedâncias nas linhas, como o mostrado na Fig. 12.10, deve-se reduzir o circuito, encontrando equivalentes de impedâncias, para encontrar as correntes e tensões de fase na carga. A partir daí, os cálculos são iguais aos cálculos anteriores.

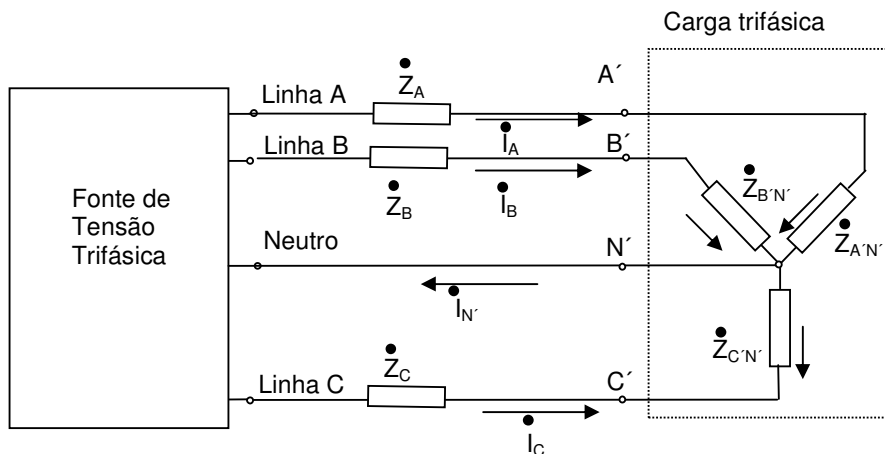


Fig. 12.10 – Carga trifásica em Y - 4 fios com impedâncias nas linhas

Em circuitos onde se tem impedâncias de neutro, como o circuito mostrado na Fig. 12.11, os cálculos se tornam mais extensos, sendo necessário o uso de equações das malhas e a solução de sistemas de equações lineares com números complexos. Este assunto não é coberto por esta apostila e faz parte das disciplinas do curso de graduação em Engenharia Elétrica.

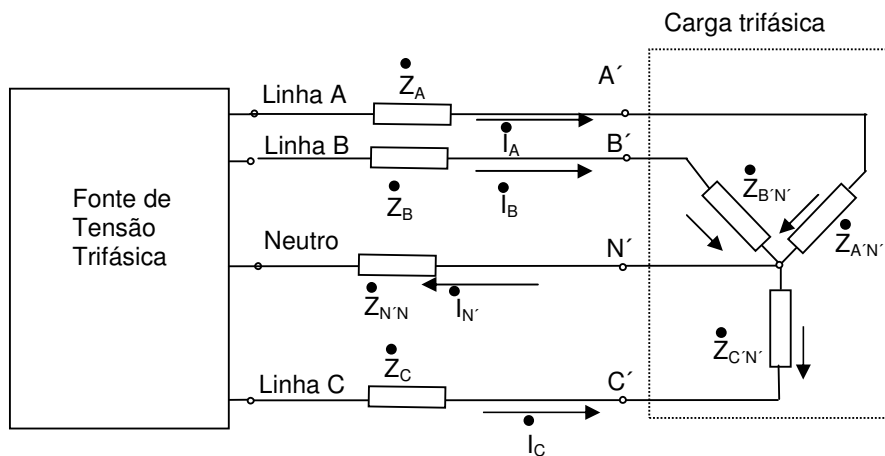


Fig. 12.11 – Carga trifásica em Y - 4 fios com impedâncias nas linhas e no neutro

12.4.2 Carga trifásica com conexão triângulo

Por simplicidade, vamos admitir inicialmente que a carga seja alimentada a partir de uma fonte de tensão trifásica através de condutores com impedância desprezível. Assim, tem-se a Fig. 12.12.

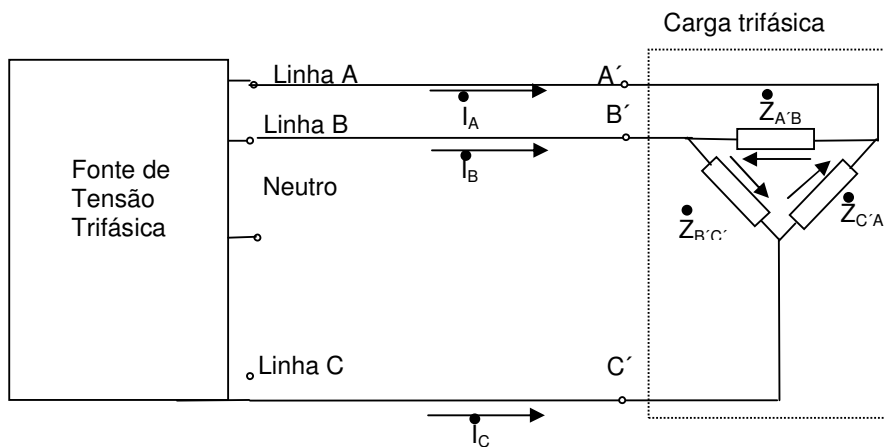


Fig. 12.12 – Carga trifásica em Δ

A tensão em cada impedância da carga é também denominada de tensão de fase. Assim, as tensões de fase são: $\dot{V}_{A'B'}$, $\dot{V}_{B'C'}$ e $\dot{V}_{C'A'}$. As tensões de linha são $\dot{V}_{A'B'}$, $\dot{V}_{B'C'}$, e $\dot{V}_{C'A'}$.

Na conexão triângulo, as tensões de linha são iguais às tensões de fase.

A corrente em cada impedância da carga é denominada de *corrente de fase*. Assim, as correntes de fase são $\dot{I}_{A'B'}$, $\dot{I}_{B'C'}$ e $\dot{I}_{C'A'}$. As correntes de linha são $\dot{I}_A$, $\dot{I}_B$ e $\dot{I}_C$. As correntes de linha são determinadas da seguinte forma:

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{AB} - \dot{I}_{CA} \quad (12.6a)$$

$$\dot{I}_B = \dot{I}_{BC} - \dot{I}_{AB} \quad (12.6b)$$

$$\dot{I}_C = \dot{I}_{CA} - \dot{I}_{BC} \quad (12.6c)$$

Os demais cálculos são iguais aos cálculos dos circuitos trifásicos em estrela. As condições de circuito trifásico equilibrado com carga em conexão Y também valem aqui. Nesta situação, os cálculos também ficam bem mais simples.

Em circuitos onde se tem impedâncias nas linhas, como o circuito mostrado na Fig. 12.13, os cálculos se tornam mais extensos, sendo necessário o uso de equações das malhas e a solução de sistemas de equações lineares com números complexos. Este assunto não é coberto por esta apostila e também faz parte das disciplinas do curso de graduação em Engenharia Elétrica.

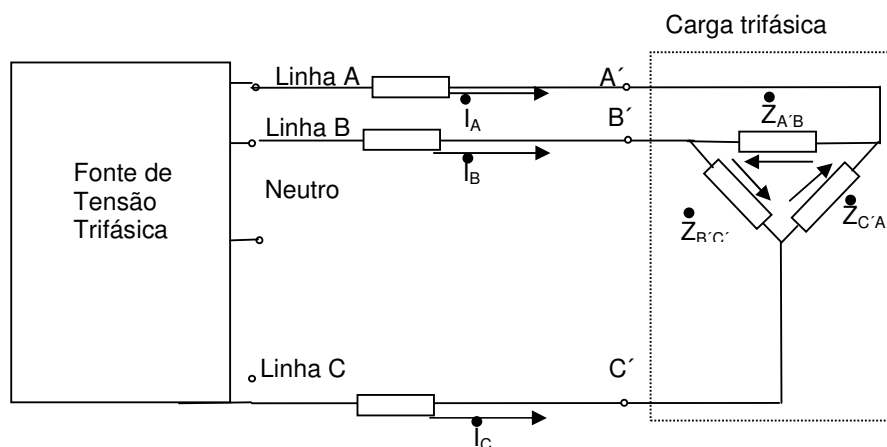


Fig. 12.13 – Circuito com Carga trifásica em Δ e impedâncias nas linhas.

Problemas Propostos

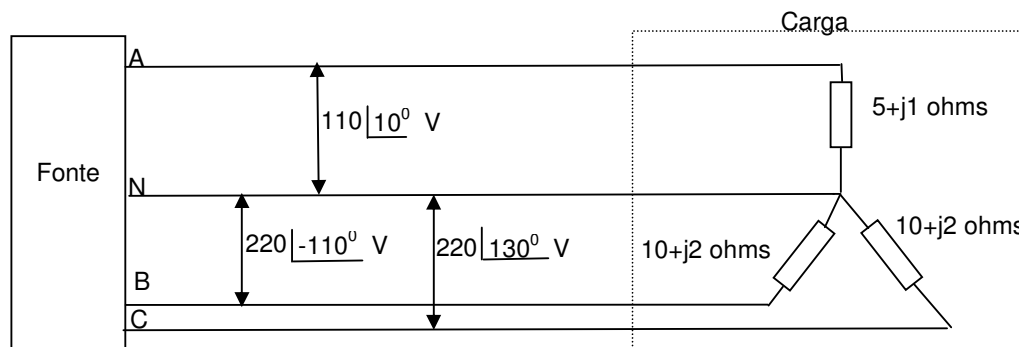
12.1 Provar as equações (12.2a), (12.2b) e (12.2c).

12.2 Provar as equações (12.3a), (12.3b) e (12.3c).

12.3 Resolver o exemplo 12.1 com as equações (12.2a), (12.2b) e (12.2c).

12.4 Se $\dot{V}_{AN} = \dot{V} \angle \alpha$, $\dot{V}_{BN} = \dot{V} \angle \alpha + 120^\circ$, $\dot{V}_{CN} = \dot{V} \angle \alpha - 120^\circ$, determinar as tensões entre linhas $\dot{V}_{AB}$, $\dot{V}_{BC}$ e $\dot{V}_{CA}$. Comparar com as equações (12.3a), (12.3b) e (12.3c).

12.5 Seja o circuito trifásico abaixo com tensões e impedâncias desequilibradas.



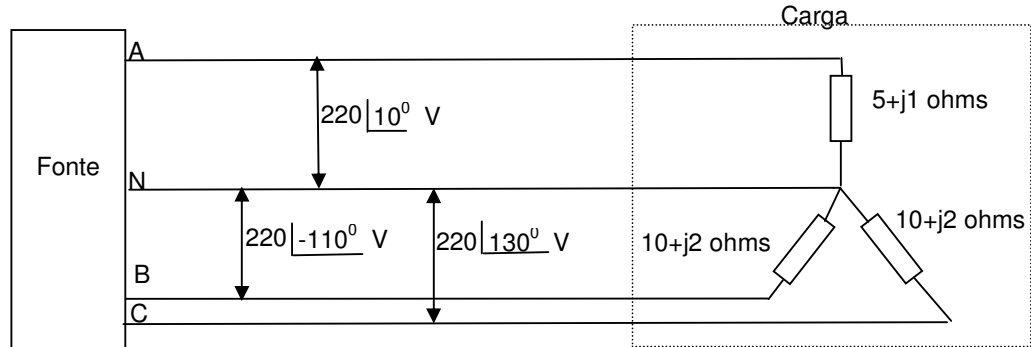
Pede-se:

- As tensões e correntes fasoriais nas 3 fases da carga.
- As tensões e correntes fasoriais nas linhas A, B, C e no neutro.

12.6 Para o circuito do problema 12.5, pede:

- As potências aparente, ativa e reativa em cada fase da carga.
- as potências aparente, ativa e reativa total da carga.
- O fator de potência total da carga.

12.7 Seja o circuito trifásico abaixo com impedâncias desequilibradas.



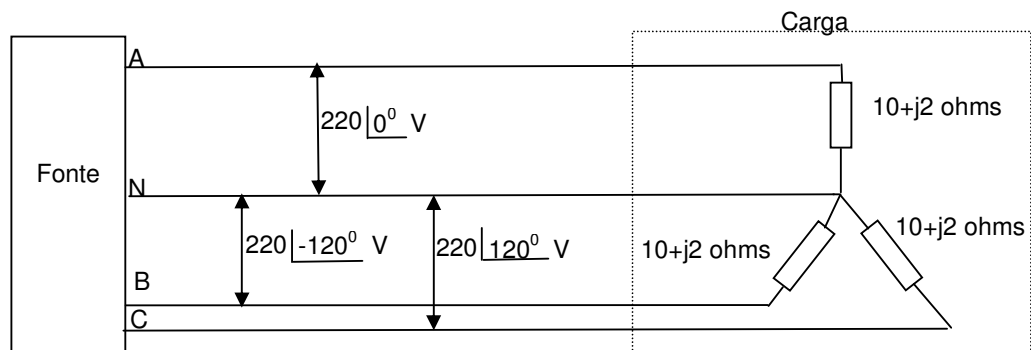
Pede-se:

- As tensões e correntes fasoriais nas 3 fases da carga.
- As tensões e correntes fasoriais nas linhas A,B,C e no neutro.

12.8 Para o circuito do problema 12.7, pede:

- As potências aparente, ativa e reativa em cada fase da carga.
- as potências aparente, ativa e reativa total da carga.
- O fator de potência total da carga.

12.9 Seja o circuito trifásico equilibrado abaixo.



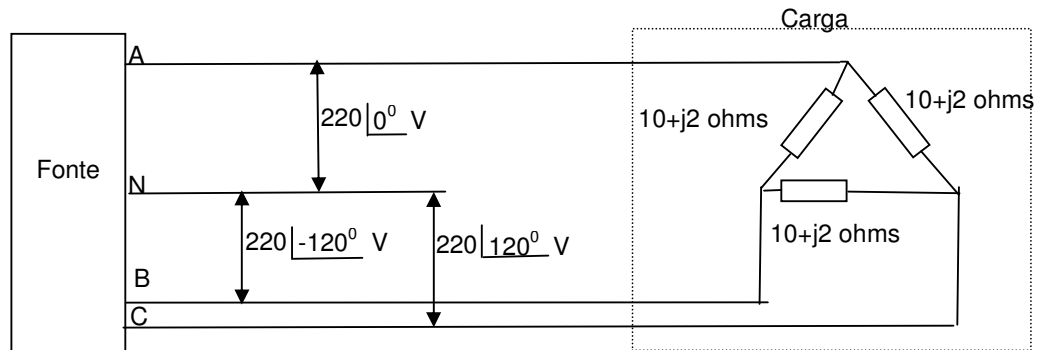
Pede-se:

- As tensões e correntes fasoriais nas 3 fases da carga.
- As tensões e correntes fasoriais nas linhas A,B,C e no neutro.

12.10 Para o circuito do problema 12.9, pede:

- As potências aparente, ativa e reativa em cada fase da carga.
- as potências aparente, ativa e reativa total da carga.
- O fator de potência total da carga.

12.11 Seja o circuito trifásico equilibrado abaixo.



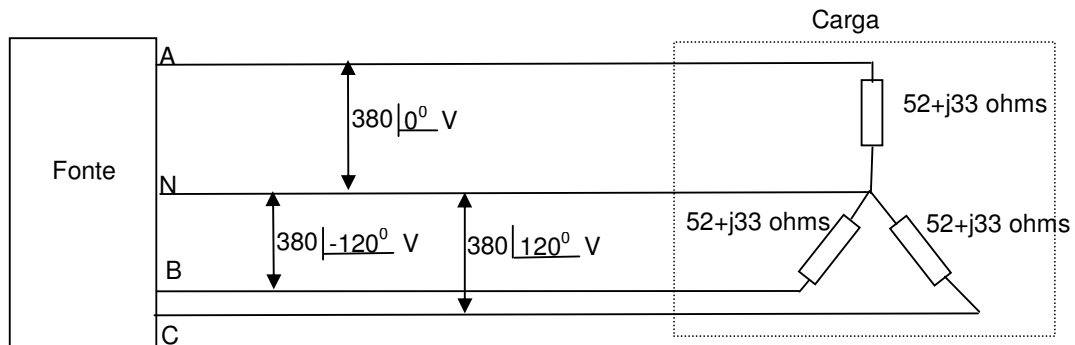
Pede-se:

- As tensões e correntes fasoriais nas 3 fases da carga.
- As tensões e correntes fasoriais nas linhas A,B,C.

12.12 Para o circuito do problema 12.11, pede:

- as potências aparente, ativa e reativa total da carga.
- O fator de potência total da carga.

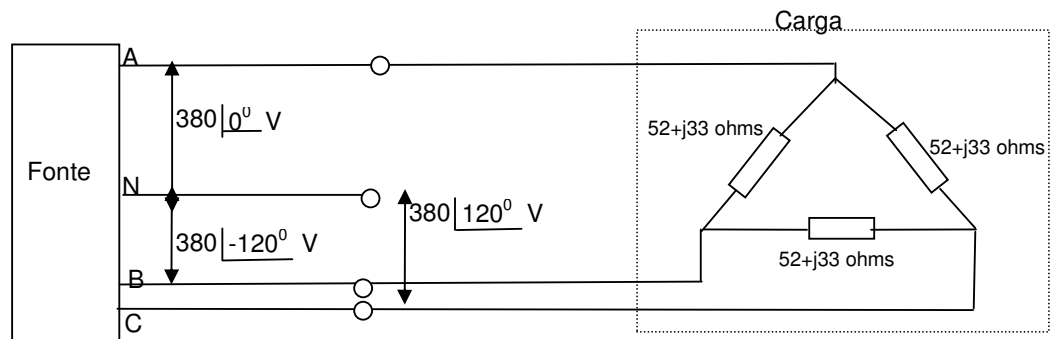
12.13 Seja o circuito trifásico abaixo com a indicação das tensões de fase-neutro na fonte:



Pede-se:

- As tensões e correntes fasoriais nas 3 fases da carga.
- As tensões e correntes fasoriais nas linhas A,B,C e no neutro.
- As potências aparente (módulo e ângulo), ativa e reativa totais da carga e suas unidades.

12.14 Seja o circuito trifásico abaixo com a indicação das tensões de fase-neutro na fonte:



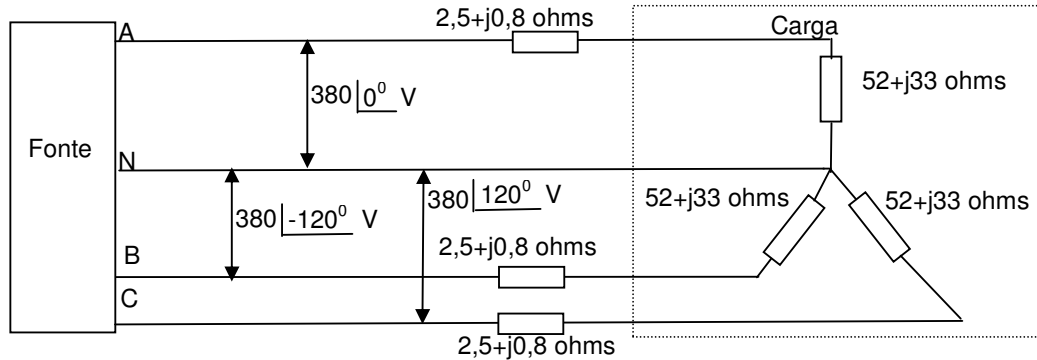
Pede-se:

- As tensões e correntes fasoriais nas 3 fases da carga.

- b) As tensões e correntes fasoriais nas linhas A,B,C.
 c) As potências aparente (módulo e ângulo), ativa e reativa totais da carga e suas unidades.

12.15 Compare os problemas 12.13 e 12.14. Qual a relação entre potências de cargas ligadas em triângulo e estrela.

12.16 Seja o circuito trifásico abaixo com a indicação das tensões de fase-neutro na fonte:



Pede-se:

- a) As tensões e correntes fasoriais nas 3 fases da carga.
 b) As tensões e correntes fasoriais nas linhas A,B,C e no neutro.
 c) As potências aparente (módulo e ângulo), ativa e reativa totais da carga e suas unidades.

Respostas

12.5 a) $\dot{V}_{A'N'} = 110 \angle 10^\circ \text{ V}$; $\dot{V}_{B'N'} = 220 \angle -110^\circ \text{ V}$; $\dot{V}_{C'N'} = 220 \angle 130^\circ \text{ V}$;
 $\dot{I}_{A'N'} = 21,6 \angle -1,31^\circ \text{ A}$; $\dot{I}_{B'N'} = 21,6 \angle -121,3^\circ \text{ A}$; $\dot{I}_{C'N'} = 21,6 \angle 118,7^\circ \text{ A}$;
 b) $\dot{V}_{A'B'} = 291 \angle 50,9^\circ \text{ V}$; $\dot{V}_{B'C'} = 381,1 \angle -80^\circ \text{ V}$; $\dot{V}_{C'A'} = 291 \angle 149^\circ \text{ V}$;
 $\dot{I}_A = 21,6 \angle -1,31^\circ \text{ A}$; $\dot{I}_B = 21,6 \angle -121,3^\circ \text{ A}$; $\dot{I}_C = 21,6 \angle 118,7^\circ \text{ A}$;
 $\dot{I}_{N'N} = 0 \angle 0^\circ \text{ A}$.

12.6 a) $\dot{S}_{A'N'} = 2373,0 \angle 11,31^\circ \text{ VA}$; $P_{A'N'} = 2326,9 \text{ W}$; $Q_{A'N'} = 465,4 \text{ VAR}$;
 $\dot{S}_{B'N'} = 4746,1 \angle 11,31^\circ \text{ VA}$; $P_{B'N'} = 4653,9 \text{ W}$; $Q_{B'N'} = 930,8 \text{ VAR}$;
 $\dot{S}_{C'N'} = 4746,1 \angle 11,31^\circ \text{ VA}$; $P_{C'N'} = 4653,9 \text{ W}$; $Q_{C'N'} = 930,8 \text{ VAR}$;
 b) $\dot{S}_{Total} = 11865,1 \angle 11,31^\circ \text{ VA}$; $P_{Total} = 11634,7 \text{ W}$; $Q_{Total} = 2327,0 \text{ VAR}$;
 c) $FP_{Total} = 0,981$.

12.7 a) $\dot{V}_{A'N'} = 220 \angle 10^\circ \text{ V}$; $\dot{V}_{B'N'} = 220 \angle -110^\circ \text{ V}$; $\dot{V}_{C'N'} = 220 \angle 130^\circ \text{ V}$;
 $\dot{I}_{A'N'} = 43,1 \angle -1,31^\circ \text{ A}$; $\dot{I}_{B'N'} = 21,6 \angle -121,3^\circ \text{ A}$; $\dot{I}_{C'N'} = 21,6 \angle 118,7^\circ \text{ A}$;
 b) $\dot{V}_{A'B'} = 381 \angle 40^\circ \text{ V}$; $\dot{V}_{B'C'} = 381,1 \angle -80^\circ \text{ V}$; $\dot{V}_{C'A'} = 381 \angle 160^\circ \text{ V}$;
 $\dot{I}_A = 43,1 \angle -1,31^\circ \text{ A}$; $\dot{I}_B = 21,6 \angle -121,3^\circ \text{ A}$; $\dot{I}_C = 21,6 \angle 118,7^\circ \text{ A}$;
 $\dot{I}_{N'N} = 21,6 \angle -1,31^\circ \text{ A}$.

12.8 a) $\dot{S}_{A'N'} = 9492,0 \angle 11,31^\circ$ VA; $P_{A'N'} = 9307,7$ W; $Q_{A'N'} = 1861,5$ VAR;
 $\dot{S}_{B'N'} = 4746,1 \angle 11,31^\circ$ VA; $P_{B'N'} = 4653,9$ W; $Q_{B'N'} = 930,8$ VAR;
 $\dot{S}_{C'N'} = 4746,1 \angle 11,31^\circ$ VA; $P_{C'N'} = 4653,9$ W; $Q_{C'N'} = 930,8$ VAR;
b) $\dot{S}_{Total} = 18984,1 \angle 11,31^\circ$ VA; $P_{Total} = 18615,5$ W; $Q_{Total} = 3723,1$ VAR;
c) $FP_{Total} = 0,981$.

12.9 a) $\dot{V}_{A'N'} = 220 \angle 0^\circ$ V; $\dot{V}_{B'N'} = 220 \angle -120^\circ$ V; $\dot{V}_{C'N'} = 220 \angle 120^\circ$ V;
 $\dot{I}_{A'N'} = 21,6 \angle -11,3^\circ$ A; $\dot{I}_{B'N'} = 21,6 \angle -131,3^\circ$ A; $\dot{I}_{C'N'} = 21,6 \angle 108,7^\circ$ A;
b) $\dot{V}_{A'B'} = 381 \angle 30^\circ$ V; $\dot{V}_{B'C'} = 381,1 \angle -90^\circ$ V; $\dot{V}_{C'A'} = 381 \angle 150^\circ$ V;
 $\dot{I}_A = 21,6 \angle -11,3^\circ$ A; $\dot{I}_B = 21,6 \angle -131,3^\circ$ A; $\dot{I}_C = 21,6 \angle 108,7^\circ$ A;
 $\dot{I}_{N'N} = 0,0 \angle 0,0^\circ$ A.

12.10 a) $\dot{S}_{A'N'} = 4746,1 \angle 11,31^\circ$ VA; $P_{A'N'} = 4653,9$ W; $Q_{A'N'} = 930,8$ VAR;
 $\dot{S}_{B'N'} = 4746,1 \angle 11,31^\circ$ VA; $P_{B'N'} = 4653,9$ W; $Q_{B'N'} = 930,8$ VAR;
 $\dot{S}_{C'N'} = 4746,1 \angle 11,31^\circ$ VA; $P_{C'N'} = 4653,9$ W; $Q_{C'N'} = 930,8$ VAR;
b) $\dot{S}_{Total} = 14238 \angle 11,31^\circ$ VA; $P_{Total} = 13962$ W; $Q_{Total} = 2792$ VAR;
c) $FP_{Total} = 0,981$.

12.11 a) $\dot{V}_{A'B'} = 381 \angle 30^\circ$ V; $\dot{V}_{B'C'} = 381 \angle -90^\circ$ V; $\dot{V}_{C'A'} = 381 \angle 150^\circ$ V;
 $\dot{I}_{A'B'} = 37,4 \angle 18,7^\circ$ A; $\dot{I}_{B'C'} = 37,4 \angle -101,3^\circ$ A; $\dot{I}_{C'A'} = 37,4 \angle 138,7^\circ$ A;
b) $\dot{V}_{A'B'} = 381 \angle 30^\circ$ V; $\dot{V}_{B'C'} = 381,1 \angle -90^\circ$ V; $\dot{V}_{C'A'} = 381 \angle 150^\circ$ V;
 $\dot{I}_A = 64,7 \angle -11,3^\circ$ A; $\dot{I}_B = 64,7 \angle -131,3^\circ$ A; $\dot{I}_C = 64,7 \angle 108,7^\circ$ A;

12.12 b) $\dot{S}_{Total} = 42714 \angle 11,31^\circ$ VA; $P_{Total} = 41884$ W; $Q_{Total} = 8377$ VAR;
c) $FP_{Total} = 0,981$.

12.13 a) $\dot{V}_{A'N'} = 380 \angle 0^\circ$ V; $\dot{V}_{B'N'} = 380 \angle -120^\circ$ V; $\dot{V}_{C'N'} = 380 \angle 120^\circ$ V;
 $\dot{I}_{A'N'} = 6,17 \angle -32,4^\circ$ A; $\dot{I}_{B'N'} = 6,17 \angle -152,4^\circ$ A; $\dot{I}_{C'N'} = 6,17 \angle 87,6^\circ$ A;
b) $\dot{V}_{A'B'} = 658,2 \angle 30^\circ$ V; $\dot{V}_{B'C'} = 658,2 \angle -90^\circ$ V; $\dot{V}_{C'A'} = 658,2 \angle 150^\circ$ V;
 $\dot{I}_A = 6,17 \angle -32,4^\circ$ A; $\dot{I}_B = 6,17 \angle -152,4^\circ$ A; $\dot{I}_C = 6,17 \angle 87,6^\circ$ A;
 $\dot{I}_{N'N} = 0,0 \angle 0,0^\circ$ A.
c) $\dot{S}_{Total} = 7033,9 \angle 32,4^\circ$ VA; $P_{Total} = 5938,9$ W; $Q_{Total} = 3768,9$ VAR;

12.14 a) $\dot{V}_{A'B'} = 658,2 \angle 30^\circ$ V; $\dot{V}_{B'C'} = 658,2 \angle -90^\circ$ V; $\dot{V}_{C'A'} = 658,2 \angle 150^\circ$ V;
 $\dot{I}_{A'B'} = 10,7 \angle -2,4^\circ$ A; $\dot{I}_{B'C'} = 10,7 \angle -122,4^\circ$ A; $\dot{I}_{C'A'} = 10,7 \angle 117,6^\circ$ A;

b) $\dot{V}_{A'B'} = 658,2 \angle 30^\circ \text{ V}$; $\dot{V}_{B'C'} = 658,2 \angle -90^\circ \text{ V}$; $\dot{V}_{C'A'} = 658,2 \angle 150^\circ \text{ V}$;
 $\dot{I}_A = 18,5 \angle -32,4^\circ \text{ A}$; $\dot{I}_B = 18,5 \angle -152,4^\circ \text{ A}$; $\dot{I}_C = 18,5 \angle 87,6^\circ \text{ A}$;
c) $S_{Total} = 21101,7 \angle 32,4^\circ \text{ VA}$; $P_{Total} = 17816,7 \text{ W}$; $Q_{Total} = 11307 \text{ VAR}$;

12.15 3.

12.16 a) $\dot{V}_{A'N'} = 364,9 \angle 0,593^\circ \text{ V}$; $\dot{V}_{B'N'} = 364,9 \angle -119,4^\circ \text{ V}$; $\dot{V}_{C'N'} = 364,9 \angle 120,6^\circ \text{ V}$;
 $\dot{I}_{A'N'} = 5,93 \angle -31,8^\circ \text{ A}$; $\dot{I}_{B'N'} = 5,93 \angle -151,8^\circ \text{ A}$; $\dot{I}_{C'N'} = 5,93 \angle 88,2^\circ \text{ A}$;
b) $\dot{V}_{A'B'} = 632,1 \angle 30,6^\circ \text{ V}$; $\dot{V}_{B'C'} = 632,1 \angle -89,4^\circ \text{ V}$; $\dot{V}_{C'A'} = 632,1 \angle 150,6^\circ \text{ V}$;
 $\dot{I}_A = 5,93 \angle -31,8^\circ \text{ A}$; $\dot{I}_B = 5,93 \angle -151,8^\circ \text{ A}$; $\dot{I}_C = 5,93 \angle 88,2^\circ \text{ A}$;
 $\dot{I}_{N'N} = 0,0 \angle 0,0^\circ \text{ A}$.
c) $S_{Total} = 3745,1 \angle 32,4^\circ \text{ VA}$; $P_{Total} = 3162 \text{ W}$; $Q_{Total} = 2007 \text{ VAR}$;